Math. P.
741
t

Math. p. 741^t

Aa2

Populäre

Geometrie,

als

Hülfsbuch

Bayerische Staatsbibliothek München

für

Leser gemeinfaßlicher Darstellungen aus dem Gebiete der Astronomie und Physik, und als Einleitung in das Studium der Geometrie überhaupt abgefaßt

von

K. L. Edlem von Littrow,

Adjuncten an der k. k. Sternwarte zu Wien, Doct. d. Phil., correspond. oder Ehren-Mitgliede der gelehrten Gesellschaften zu Sächs. Altenburg, Erfurt, Frankfurt a. M., Jassy, Mainz, Padua u. s. w.

Bayer. Staatsministerium
f. Ernährung, Landwirtschaft u. Forsten
Ministerialforstabteilung
Bücherei
Aa 2
KGL. BAY. MINISTERIALFORSTBUREAU
566
29

Stuttgart.
Hoffmann'sche Verlags-Buchhandlung.
1839.

Gd 164/75

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Kön. Staats-
Ministerial
Haupt-Forst-
Buchhaltung

Vorwort.

Physikalische und astronomische Kenntnisse finden in unserer Zeit immer steigenderes Interesse, und die Schriften, welche gemeinfaßliche Darstellungen derselben enthalten, erfreuen sich von Tag zu Tag eines größeren Publikums. Um so allgemeiner muß sich denn auch das Bedürfniß herausstellen, wenigstens mit den ersten Anfangsgründen der Geometrie bekannt zu seyn, ohne die sich in jenen Wissenschaften selbst bei der populärsten Behandlung wenig leisten läßt. Die Vorlesungen über populäre Astronomie, welche ich an der

hiesigen Hochschule zu geben habe, leiteten mich, da ich bei mehreren Zuhörern auf jenes Hinderniß des Verständnisses meines Vortrages gekommen war, auf den Gedanken, eine Schrift abzufassen, in welcher der Leser mit den wichtigsten Lehren der Geometrie bekannt gemacht würde, ohne das Gerüste algebraischer Kunstgriffe und die eigenthümliche mathematische Sprache einzuführen, welche oft bloß durch ihre ungewöhnliche Form dem Inhalte nach sehr einfache Sätze dem Laien unzugänglich machen.

Ich übergebe nun in der vorliegenden Schrift einen Versuch dieser Art der Oeffentlichkeit. Unter den wenigen Vorgängern, die ich in diesem Fache hatte, ist wohl bei weitem das gediegenste: D. Lardner's First principles of Arithmetic and Geometry. London 1835, dessen zweite Abtheilung ich denn auch meiner gegenwärtigen Schrift zum Grunde legte. Umfang und Ordnung des Stoffes schienen mir

keiner Verbesserung zu bedürfen, daher ich sie auch im Allgemeinen beibehielt, und nur durch gewisse Auslassungen und Zusätze meinem hier verfolgten Zwecke näher zu kommen suchte. Was hingegen die Art des Vortrages betrifft, so glaubte ich z. B. die dialogische Form, welche Lardner gewählt, als im Popularisiren des Gegenstandes doch wohl zu weit gehend, völlig verlassen, und insofern das Ganze umschmelzen zu müssen.

Die hier gewählte, so viel mir bekannt, wenigstens auf deutschem Boden neue Behandlungsart des an sich allbekannten, der Hauptsache nach schon von Vater Euclid unverbesserlich bearbeiteten Stoffes macht vielleicht gegenwärtige Schrift auch zum Vorbereitungsbuche bei den geometrischen Studien der Jugend geeignet, und ich hatte, da sich beide Zwecke so gut vereinen ließen, auch diesen bei der Abfassung derselben im Auge.

Inwiefern ich die Aufgabe, die ich mir hier stellte, gelöset, mag nun das Publikum entscheiden. Jedenfalls glaube ich bei einer Sache, in der es, ein seltener Fall der heutigen Literatur, so sehr an Vorgängern fehlte, Nachsicht ansprechen zu dürfen, und sehe deßhalb mit Vertrauen der Aufnahme dieser Blätter entgegen.

Wien, den 11. November 1838.

K. L. von Littrow.

Einleitung.

Das Wort Geometrie kommt vom griechischen $\gamma\eta$ (die Erde) und $\mu\varepsilon\tau\varrho o\nu$ (das Maaß), heißt also seiner Etymologie nach so viel als Erdmeßkunst, und sollte mit dem, was man gewöhnlich Feldmeßkunst zu nennen pflegt, identisch seyn. Doch ist dem nicht ganz so; obschon der Feldmesser Geometrie verstehen muß, so ist doch sein Geschäft wesentlich von dem verschieden, was man heut zu Tage unter Geometrie begreift. Wahrscheinlich kamen die Menschen auf die ersten geometrischen Sätze durch die Nothwendigkeit, Land unter sich zu vertheilen. In der That soll die Geometrie eine Erfindung der Aegypter seyn. Der mächtige Nil, der bekanntlich ihr Land von einem Ende zum andern durchfließt, überschreitet zu gewissen Jahreszeiten seine Ufer, und schwemmt dann alle Grenzmarken und Einfriedungen, durch welche das Eigenthum verschiedener

Besitzer getrennt war, spurlos weg. Nach erfolgtem Zurücktreten der Gewässer unterliegt es daher großen Schwierigkeiten, die Grenzen und die Ausdehnung des Besitzthums eines Jeden zu finden, und hier ist dann die Meßkunst wohl am Platze, und wird durch häufigen Gebrauch bald zu hoher Vollkommenheit gedeihen. Wenn gleich so in Aegypten mehr Veranlassung zur Ausbildung dieser Wissenschaft vorhanden war, so fehlte es daran ganz und gar wohl nirgends, und die Geometrie mag daher in ihrem ersten Entstehen eben so alt, als weit verbreitet seyn.

Unter Geometrie im Allgemeinen aber versteht man die Kunst, Größen jeder Art zu messen, ihre Gestalten auszudrücken und zu vergleichen. Der Architect, wenn er über die Größe und die Verhältnisse eines Gebäudes urtheilt, der Zimmermann, der ein Gebälke mißt und gestaltet, der Seemann, wenn er den Lauf und die Richtung seines Schiffes bestimmt, der Astronom, der die Entfernungen der Gestirne zu finden sucht — alle geben sich mit Raum-Messungen ab, d. h. wenden Geometrie an. Die Feldmeßkunst ist also nur eine einzelne dieser vielen Anwendungen, und die Geometrie lehrt uns die allgemeinen Regeln kennen, die für alle diese verschiedenen Zwecke gleich nothwendig und gültig sind.

Viele dieser Regeln mögen schon früh gefunden und benützt worden seyn, und gewiß sind sie nicht alle, wie überhaupt keine Wissenschaft, die Entdeckung eines einzigen Menschen oder auch nur

eines einzigen Zeitalters, sondern wurden nach und nach von Verschiedenen gefunden, je nachdem Erfahrung sie kund und Veranlassung dazu gab.

Der erste jedoch, der alle die einzelnen Sätze sammelte, und dabei wahrscheinlich, vorzüglich um den Zusammenhang derselben vollkommen herzustellen, viele neue erfand, war Euclid, ein wahrhaft großer Gelehrter, der, aus Alexandrien in Aegypten gebürtig, um das Jahr 300 vor Christo lebte, und in vielen Zweigen des menschlichen Wissens arbeitete und schrieb. Sein vorzüglichstes Werk, das den eigentlichen Grund zu seiner Unsterblichkeit legte, sind die „Elemente der Geometrie", ein Buch, das, obschon vor mehr als zweitausend Jahren abgefaßt, seine Aufgabe so vollkommen löst, daß seitdem über denselben Gegenstand keines geschrieben wurde, welches man jenem allgemein vorgezogen hätte.

Obschon nun die Geometrie in viele Geschäfte unmittelbar eingreift, so liegt doch der Grund davon, daß man so allgemein sie in den Schulen lehrt, vorzüglich in dem Nutzen der Verstandesschärfung, den sie mehr, als irgend eine Wissenschaft gewährt. Dem Mathematiker gibt seine Wissenschaft eine Stärke der Denkkraft, eine Consequenz der Schlußfolge, und eine Bündigkeit im Ausdruck, die ihn vor allen auszeichnet, denen gleiche Uebung fehlte. Astronomische und physikalische Lehren aber kann man ohne geometrische Vorkenntnisse durchaus nicht

verstehen. Als Vorbereitung nun sowohl zum Studium der Elemente Euclids, als auch für Jene, die populäre Schriften über die eben genannten Naturwissenschaften lesen wollen, mag die folgende, von der Euclideischen abweichende Darstellungsweise versucht werden.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Erster Abschnitt.

Natur der geraden Linie. — Unterschied zwischen geraden und krummen Linien. — Geometrische Figuren. — Winkel. — Spitzer und stumpfer Winkel. — Rechter Winkel.

1.

Was man unter einer geraden Linie versteht, weiß Jedermann; ein anschauliches Bild davon ist ein Draht, den man so straff, als möglich, von einem Punkte zu einem anderen gespannt hat.

2.

Zwischen zwei Punkten kann es nur eine gerade, hingegen unendlich viele krumme Linien geben; hier findet das gegenseitige Verdrängen, wie bei der geraden Linie, keineswegs Statt. So kann ich zwischen den Punkten A und B (Fig. 1) eine Menge krummer Linien ziehen, die sich nur in diesen Punkten begegnen. Um unser früheres Gleichniß fortzusetzen, zwischen zwei Punkten kann man sehr viele

schlaffe Drähte ziehen, hingegen nur einen völlig straffen Draht. Wenn der Mond im ersten Viertel ist, bilden seine Umrisse zwei krumme zwischen denselben Punkten, nämlich zwischen den Hörnerspitzen des Mondes gezogene Linien, die sich nur in diesen Spitzen berühren.

3.

Eine gerade Linie ist ferner die kürzeste, welche man zwischen zwei Punkten ziehen kann; denn es wird desto weniger Draht nöthig seyn, je straffer man ihn spannt. Dieß ist eine Eigenschaft, welche die gerade Linie vor allen anderen Linien auszeichnet.

4.

Ein weiteres bemerkenswerthes Kennzeichen derselben ist, wie Euclid sich ausdrückt, daß sie nur zwischen ihren Endpunkten liegt, und weder nach oben, noch unten, noch nach sonst einer Seite hin ausgedehnt ist. Diese Eigenschaft spricht sich z. B. aus, wenn man längs eines Lineals hinsieht, dessen Schneide, wenn es vollkommen ist, in einer gewissen Lage ganz in einen Punkt zu verschwinden scheint.

5.

Unter geometrischer Figur versteht man einen von Linien eingeschlossenen Raum.

Von zwei geraden Linien kann daher keine Figur gebildet werden; denn, wenn man z. B. vom Punkte

A (Fig. 2) zwei gerade Linien AB und AC zieht, so können sich nach dem obigen (2) dieselben in keinem zweiten Punkte begegnen, der Raum ABC bleibt also immer auf der Seite von B und C offen, und die Linien AB und AC bilden nur einen Winkel BAC.

6.

Unter Winkel versteht man also einen solchen von zwei Linien theilweise eingeschlossenen Raum; der Punkt A heißt sein Scheitel, die Linien AB und AC aber seine Schenkel, und den Winkel bezeichnet man durch die drei Buchstaben A, B und C, indem man denjenigen, der am Scheitel steht, in die Mitte setzt; so ist z. B. hier BAC der eben betrachtete Winkel.

7.

Ein Winkel wird größer oder kleiner, d. h. wie die Kunstausdrücke lauten, stumpfer oder spitzer seyn, je nachdem die ihn bildenden Schenkel mehr oder weniger geöffnet sind. So ist der Winkel BAC in Fig. 3 stumpfer, als der Winkel BAC in Fig. 2.

8.

Um zu erkennen, ob zwei Winkel gleich sind, wird man den Scheitel des einen über den Scheitel des andern, und einen Schenkel des einen über einen Schenkel des anderen Winkels legen; fallen dann die beiden anderen Schenkel ebenfalls

genau über einander, so sind die beiden Winkel gleich; im Gegentheile derjenige Winkel der größere, dessen Schenkel über den des anderen Winkels hinaus liegt.

9.

Wenn zwei gerade Linien BC und DE sich in einem Punkte A schneiden, so entstehen um den Punkt A herum vier Winkel, von denen je zwei, nämlich die beiden stumpfen DAC und BAE, so wie die beiden spitzen EAC und BAD einander, wie man sich nach (8) überzeugen kann, gleich sind. Diese paarweise einander gleichen Winkel heißen Scheitelwinkel.

10.

Wenn man die gerade Linie DE um den Punkt A herum dreht, etwa wie man einen Theil einer Scheere bewegt, indem man dieselbe bald öffnet, bald schließt, so wachsen offenbar die beiden spitzen Scheitelwinkel im selben Maaße, in welchem die stumpfen abnehmen, und umgekehrt, je nachdem man bei dieser Drehung den Punkt E von dem Punkte C entfernt, oder ihn demselben nähert. Da wird es nun offenbar eine Lage der Linie DE geben, in welcher die vier um A herum liegenden Winkel einander durchaus gleich sind, wie dieß in Fig. 5 der Fall ist. Dann aber sagt man, daß die beiden Linien BC und DE auf einander senkrecht stehen, und die vier von ihnen gebildeten Winkel heißen rechte Winkel.

11.

Die Ausdrücke spitzer und stumpfer Winkel hat man nun genauer dahin zu verstehen, daß man unter dem ersten Ausdrucke Winkel begreift, die kleiner, und unter dem letzten Winkel, die größer, als ein rechter sind. Ein rechter Winkel selbst aber ist an sich weder spitz, noch stumpf, sondern hält zwischen beiden die Mitte.

12.

Die vier von zwei sich schneidenden geraden Linien gebildeten Winkel (Fig. 4) sind also zusammen immer gleich vier Rechten; denn dieß ist bewiesen für die Stellung der Linien in Fig. 5, allein, wie man nun auch DE um A herum drehen mag, so nimmt das eine Paar Winkel immer im selben Maaße zu, in welchem das andere Paar abnimmt, und die Summe aller vier Winkel muß dieselbe, d. h. muß immer gleich vier Rechten bleiben.

13.

Da ferner zur Bildung der beiden rechten Winkel in Fig. 5, die ober der Linie BC liegen, immer nur entweder die zwei rechten Winkel in Fig. 5, oder der spitze Winkel EAC und der stumpfe EAB in Fig. 4 dienen, die beide auf einer Seite von BC liegen, so machen diese beiden Winkel zusammen immer zwei Rechte, und heißen Nebenwinkel.

Sie entstehen aber im Allgemeinen dadurch, daß eine Gerade BC von einer anderen Geraden AE getroffen wird.

Zweiter Abschnitt.

Dreieck. — Seiten und Winkel desselben. — Gleichheit von Dreiecken. — Bedingungen dafür. — Unterschied zwischen Dreiecken und anderen Figuren. — Gleichwinklige Dreiecke sind ähnlich. — Gleichseitige Dreiecke. — Gleiche Seiten bringen gleiche Winkel, ungleiche Seiten ungleiche Winkel mit sich. — Ein Quadrat zu verzeichnen. — Gleichseitiges Dreieck.

14.

Nach (5) kann man keinen Raum mit zwei geraden Linien einschließen; wohl aber kann man dieß mit drei geraden Linien, und nennt die so entstehende Figur ein Dreieck, da sie immer drei Winkel enthält.

15.

Die geraden Linien, welche die Figur bilden, oder mit anderen Worten die Schenkel der in der Figur vorkommenden Winkel heißen die Seiten der Figur, also z. B. im Dreiecke abc sind A, B, C die Seiten des Dreiecks.

Eine der Seiten eines Dreiecks wird zuweilen auch Basis genannt; gewöhnlich ist es die zu

unterst liegende, obschon eigentlich kein bestimmter Unterschied zwischen den Ausdrücken Basis und Seite besteht, und man jede Seite eines Dreieckes als Basis desselben betrachten kann.

16.

Man schneide die beiden Winkel b und c Fig. 6 in Papier aus, womit man dann leicht Winkel, welche jenen gleich sind, wird beschreiben können, ziehe Fig. 7 eine Linie A', die gleich lang mit der Linie A in Fig. 6 ist, und ziehe nun mit den aus Papier ausgeschnittenen Winkeln an den Enden dieser Linie zwei Winkel b' und c', die also den Winkeln b und c in Fig. 6 gleich seyn werden. Verlängert man die Schenkel dieser Winkel b' und c', so entsteht ein Dreieck, dessen eine Seite A', so wie die Winkel b' und c' der Seite A und den Winkeln b und c des Dreiecks Fig. 6 gleich sind. Vergleicht man aber die Dreiecke näher, so findet man auch die übrigen Stücke des neuen Dreieckes den analogen des alten vollkommen gleich, nämlich die Seite B' gleich der Seite B, die Seite C' gleich der Seite C, den Winkel a' gleich dem Winkel a, und also überhaupt die beiden Dreiecke in jeder Rücksicht einander gleich, so daß sie über einander gelegt sich durchaus genau decken.

Zwei Dreiecke sind also gleich, wenn eine Seite mit den anliegenden Winkeln des einen Dreieckes einer Seite mit den

zwei anliegenden Winkeln des anderen Dreieckes gleich sind, und man braucht, um sich von der völligen Gleichheit zweier Dreiecke zu überzeugen, nicht erst alle Stücke desselben, sondern nur eine Seite mit den anliegenden Winkeln zu betrachten.

Wenn man in das Blatt eines Buches ein sogenanntes Ohr macht, so deckt das umgebogene Dreieck auf der Seite des Buches einen Raum, den jedermann für diesem Dreiecke gleich halten wird; der Grund davon aber liegt in dem eben gegebenen geometrischen Satze, denn die Linie des Buges ist als Seite, so wie die anliegenden Winkel beiden Figuren, der deckenden und der gedeckten, gemeinschaftlich.

So einfach ist dieser hochwichtige und an Anwendung überreiche Satz der Geometrie, und so sehr liegen die Schwierigkeiten, welche Viele beim Verständnisse ähnlicher Lehren finden, mehr in den ungewöhnlichen Kunstausdrücken und der Sprache, die für wissenschaftliche Zwecke nöthig sind, als in der Sache selbst.

Man begann hier übrigens mit Betrachtung der Dreiecke, weil, wie wir später sehen werden, jede geometrische von geraden Linien eingeschlossene Figur sich in Dreiecke zerlegen läßt, und man für jede derselben leicht die nöthigen Sätze findet, wenn man diejenigen kennt, welche für Dreiecke gelten. Es wird daher auch von Wichtigkeit seyn, alle die

verschiedenen Fälle zu erforschen, in welchen zwei Dreiecke einander gleich sind.

17.

Man kann sich aber auf dieselbe Art überzeugen, daß zwei Dreiecke Fig. 8 und Fig. 9 einander vollkommen gleich sind, wenn ein Winkel c mit den einschließenden Seiten A und B des einen einem Winkel c' mit den einschließenden Seiten A' und B' des anderen Dreieckes gleich sind.

18.

Ziehen wir jetzt eine Linie A' Fig. 10 gleich der Linie A in Fig. 8, schneiden wir den Winkel b in Papier aus, und ziehen wir damit C', indem wir b' gleich b machen. Nehmen wir ebenso ein Muster vom Winkel a, setzen wir einen Schenkel desselben auf C', und bewegen wir dasselbe längs der Linie C' so lange bis der andere Schenkel durch das obere Ende von A' geht. Zieht man dann B', so ist auf diese Weise ein Dreieck Fig. 10 entstanden, welches mit Fig. 8 die Seiten A und A', die Winkel b und b' und die Winkel a und a' gleich hat. Legt man aber diese beiden Dreiecke über einander, so decken sie sich vollkommen, sind also einander gleich.

Es sind daher zwei Dreiecke einander auch dann gleich, wenn zwei Winkel und eine einem dieser Winkel gegenüber liegende Seite des einen Dreieckes zwei Winkeln und der

dem gleichen Winkel gegenüber liegenden Seite des anderen Dreieckes gleich sind.

19.

Endlich sind zwei Dreiecke einander auch gleich, wenn alle drei Seiten des einen den drei Seiten des anderen gleich sind, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man ein beliebiges Dreieck verzeichnet, und drei gerade Linien, stückweise den Seiten desselben gleich, z. B. aus Draht bildet. Setzt man diese Linien dann zu einem Dreiecke zusammen, und bringt man dieses über jenes verzeichnete Dreieck in der gehörigen Lage, so decken sich dieselben zum Beweise ihrer Gleichheit vollkommen.

20.

Man nennt die hier betrachtete Gleichheit von Figuren, eben dieser Eigenschaft des Deckens wegen, Congruenz, und die so gleichen Figuren congruente Figuren, von einem lateinischen Worte, welches „zusammenfallen“ heißt.

21.

Der strenge Beweis für diesen Satz ist einigen Schwierigkeiten unterworfen. Wir begnügen uns hier mit dieser Darstellung desselben, und bemerken nur noch, daß jene Eigenschaft bei gleichen Seiten congruent zu seyn, nur dem Dreiecke zukommt,

und keinesweges von anderen geometrischen Figuren gilt, wie denn z. B. bei einer vierseitigen Figur Fig. 11 und Fig. 12 die Seiten A, B, C, D stückweise den Seiten A', B', C', D' gleich, und doch die Figuren selbst in Gestalt und Größe völlig von einander verschieden seyn können.

22.

Wenn man von der Vergleichung von Dreiecken in Bezug auf ihre Gleichheit spricht, liegt der Fall, wo zwei Dreiecke gleiche Winkel haben, sehr nahe, und wird gewiß Jedermann schnell in den Sinn kommen; demungeachtet findet in diesem Falle nicht nothwendig Congruenz statt, wie wir schon aus den drei Fig. 13, 14 und 15 verzeichneten Dreiecken sehen, die alle gleiche Winkel haben, und doch zwar in der Gestalt ähnlich, aber in der Größe durchaus verschieden sind. Wir werden von diesem und verwandten Fällen weiter unten handeln, und wollen uns gegenwärtig auf diese kurze Erwähnung beschränken.

23.

Es stelle Fig. 16 ein Dreieck vor, dessen Seiten A und B einander gleich sind, und man führe von c nach der Mitte der Seite C eine gerade Linie cC, welche also das ursprüngliche Dreieck in zwei Dreiecke zerfällt, die gleiche Seiten haben, da A gleich B, Cc beiden Dreiecken gemeinschaftlich und, weil C in der Mitte zwischen a und b liegt,

bC gleich Ca ist. Diese beiden Dreiecke sind also nach 19. congruent, folglich auch die Winkel bei C, die bei c, und die Winkel a und b einander gleich. Wenn aber die Winkel bei C einander gleich sind, so ist nach (10) jeder derselben ein Rechter, und die Linie cC senkrecht auf der Seite C.

Man nennt ein solches Dreieck mit zwei einander gleichen Seiten ein gleichschenkliges, c den Scheitel, und die Seite C die Basis.

In einem gleichschenkligen Dreiecke also sind die Winkel an der Basis gleich; eine vom Scheitel zum Mittel- oder Halbirungspunkte der Basis gezogene Linie steht senkrecht auf der Basis und theilt den Winkel am Scheitel in zwei gleiche Theile oder halbirt ihn.

24.

Ziehen wir jetzt Fig. 17 eine Linie C, und mit einem in Papier ausgeschnittenen Winkel an den Enden dieser Linie C zwei gleiche Winkel a und b. Verlängert man die Schenkel derselben, so entsteht ein Dreieck, dessen Seiten A und B gleich sind, wie schon durch unmittelbare Messung mit dem Zirkel ersichtlich wird. Fällt man aber überdieß aus c eine Senkrechte cC auf C, so folgt jene Gleichheit von A und B auch aus der Betrachtung der so entstandenen Dreiecke acC und bcC, die nach 18. congruent sind, weil sie die Seite cC gemeinschaftlich,

und die Winkel bei C als rechte, so wie die Winkel b und c vermöge der Annahme gleich haben. Es folgt aber ferner aus der Congruenz dieser Dreiecke auch, daß die Seite C und der Winkel c durch die Senkrechte cC in zwei gleiche Theile getheilt oder halbirt worden sind.

Wenn also ein Dreieck zwei gleiche Winkel hat, so sind die gegenüber liegenden Seiten ebenfalls gleich, und es ist daher ein gleichschenkligtes Dreieck. Eine Senkrechte vom Scheitel auf die Basis aber halbirt dann diese so wie den Winkel am Scheitel.

25.

So wie nun diese Gleichheit der Seiten eine Gleichheit der Winkel herbeiführt, so wird auch eine Ungleichheit der Seiten eine entsprechende Ungleichheit der Winkel erzeugen, und z. B. dem größeren Winkel stets die größere Seite gegenüber liegen, wie dieß schon der Augenschein lehrt, wenn man sich mehrere Dreiecke mit ungleichen Seiten verzeichnet.

26.

Um aber einen rechten Winkel verzeichnen, oder was dasselbe, eine Gerade auf die andere senkrecht ziehen zu können, wird man ein Stück Papier auf einer Seite genau in gerader Linie beschneiden, und dann so zusammenbiegen, daß ein Theil dieser geraden Linie genau

über den andern fällt; eine gerade Linie im Buche des Papiers gezogen, steht senkrecht auf der beschnittenen Seite desselben, denn die beiden von dieser geraden Linie auf der beschnittenen Seite gebildeten Winkel sind Nebenwinkel und gleich, da sie sich aber deckten, also rechte Winkel. So erhält man leicht ein Muster für rechte Winkel und zur Fällung von Senkrechten, wenn man diesen so eben erhaltenen rechten Winkel ausschneidet.

27.

Wenn die drei Seiten eines und desselben Dreieckes einander gleich sind, so sind auch die Winkel desselben einander gleich, denn nach (23) sind dann immer je zwei Winkel gleich, mithin alle drei unter einander; und umgekehrt: wenn die Winkel eines und desselben Dreieckes unter einander gleich sind, so sind auch die Seiten einander gleich. Hiervon kann man sich leicht überzeugen, wenn man ein solches sogenanntes gleichseitiges Dreieck Fig. 18 verzeichnet, und Winkel mit Winkel vergleicht, oder umgekehrt, eine solche Figur mit gleichen Winkeln construirt, und die Seiten vergleicht.

Dritter Abschnitt.

Parallele Linien. — Sie schneiden sich nie. — Stehen überall gleichweit von einander ab. — Sind gleich geneigt gegen Linien, die sich schneiden. — Stehen senkrecht auf dieselbe Linie. — Eine Parallele zu ziehen.

28.

Legen wir einen in Papier ausgeschnittenen Winkel auf die Linie AB Fig. 19 und beschreiben wir damit im Punkte P einen Winkel a. Bringen wir dann unseren Winkel von Papier auf den Endpunkt Q des eben gezogenen Schenkels vom Winkel a und legen wir ihn hier in einer mit der früheren entgegengesetzten Richtung an, um so damit den Winkel b, der also dem Winkel a gleich seyn wird, zu beschreiben. Verlängert man nun den eben gezogenen Schenkel CQ dieses Winkels etwa nach D, so fällt bei den so entstandenen geraden Linien AB und CD sogleich auf, daß dieselben sich auf keiner Seite einander zu nähern, oder von einander zu entfernen scheinen, so daß man dieselben beliebig verlängern könnte, ohne daß sie irgendwo sich schnitten. In der That findet man, wenn man von verschiedenen Punkten der Linie CD Senkrechte auf AB fällt, dieselben alle genau von gleicher Länge, zum Beweise, daß diese beiden Linien durchaus gleichweit von einander entfernt sind.

29.

Solche Linien nun, die durchaus gleichweit von einander abstehen, und sich also nicht schneiden, man mag sie verlängern, so weit man will, heißen parallele Linien.

30.

Aus der Art, wie wir Fig. 19 construirten, geht hervor, daß wenn zwei solche Parallele AB und CD von einer dritten Geraden PQ geschnitten werden, die auf entgegengesetzten dieser Geraden gebildeten Winkel a und b, welche man Wechselwinkel nennt, einander gleich sind. Dieß findet offenbar bei jedweder Anordnung der drei Linien Statt, wie schon aus der völlig anders gestellten Fig. 20 erhellt.

31.

Daraus folgt unmittelbar, daß, wenn eine Gerade zwei Parallele schneidet, und mit einer derselben rechte Winkel bildet, sie auch mit der anderen rechte Winkel bilden müsse.

32.

Eine gerade Linie also, die auf einer der Parallelen senkrecht steht, steht auch auf der anderen, und überhaupt auf allen mit jenen ersten parallel gezogenen Linien senkrecht (Fig. 21).

33.

Ziehen wir wieder parallele Linien und eine Gerade, die sie schneidet, Fig. 22, so entstehen hier offenbar im Ganzen acht Winkel, von denen je vier, theils als Wechselwinkel (30), theils als Scheitelwinkel (9) einander gleich, und hier deßhalb auch mit denselben Buchstaben bezeichnet sind. Man nennt aber die auf einer Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel Gegenwinkel, und zwar a und b, so wie a' und b' innere, a'' und b'', so wie a''' und b''' äußere Gegenwinkel.

Es ist also ein innerer stets seinem äußeren Gegenwinkel gleich, und umgekehrt.

34.

Die Winkel a, a' . . . sind durchaus spitz, die Winkel b, b', . . . durchaus stumpf, und als Nebenwinkel (13) machen immer einer der Winkel a, a', . . . und einer der Winkel b, b' . . . zusammen zwei Rechte aus.

Je zwei innere Gegenwinkel sind also so wie je zwei äußere zusammenn immer gleich zwei Rechten.

35.

Steht die schneidende Linie senkrecht auf den Parallelen, wie in Fig. 23, so sind sämmtliche acht Winkel unter einander gleich, denn jeder von ihnen ist ein rechter.

36.

Wenn man zu einer Linie AB eine Parallele ziehen will, so wird man eine Senkrechte PM Fig. 24 auf dieselbe errichten, und senkrecht auf PM eine dritte Linie LN ziehen, welche parallel mit AB ist, da die schneidende PM mit beiden Linien gleiche Winkel bildet.

37.

Durch den Punkt P aber kann offenbar nur eine gerade Linie parallel zu AB gezogen werden, denn wie man auch immer eine andere Linie PO ziehen mag, so wird dieselbe nie die nöthige Bedingung des stets gleich weiten Abstandes von AB erfüllen, und durch Verlängerung der beiden Linien ein Schneiden derselben möglich werden (29).

Vierter Abschnitt.

Aenderungen der Winkel eines Dreiecks, wenn dessen Seiten sich ändern. — Einer wächst, wenn der andere abnimmt. — Ihre Summe ist immer dieselbe, und stets gleich zwei Rechten. — Eine vierseitige Figur. — Ihre Zerfällung in Dreiecke. — Die Summe ihrer Winkel immer dieselbe, und stets gleich vier Rechten. — Derselbe Schluß auf eine fünfseitige Figur ausgedehnt. — Auf alle Figuren. — Beweisart für die Gleichheit der Winkel zweier Dreiecke. — Größe der Winkel eines gleichseitigen Dreiecks. — Eines rechtwinkligen Dreiecks.

38.

Denken wir uns ein Dreieck ABC Fig. 25, dessen eine Seite BC zwar immer durch B geht, jedoch längs der verlängerten Seite AC ihre Stellung ändert. Welche Aenderung erfahren die Winkel bei B und C durch diese Bewegung der Seite BC? offenbar wächst der eine, wenn der andere abnimmt und umgekehrt. Entferne ich nämlich C von A, so wird der Winkel bei C immer kleiner, der bei B immer größer; nähere ich hingegen C dem Punkte A, so findet das Gegentheil Statt, der Winkel bei C nimmt zu, der bei B aber ab. Da nun überdieß der eine Winkel gerade so viel zunimmt, als der andere abnimmt, wovon man sich durch unmittelbare Messung leicht überzeugt, so ändert sich dadurch die Totalsumme der drei Winkel des Dreieckes nicht,

da sie auf einer Seite wieder gewinnt, was sie auf der anderen verloren.

Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist also dieselbe, wie man auch immer die einzelnen Winkel ändern mag.

So sonderbar dieser Satz auch auf den ersten Anblick ist, wenn man die verschiedenen Gestalten, welche ein Dreieck annehmen kann, und wovon uns Fig. 26 mehrere Beispiele zeigt, betrachtet, so können wir uns doch leicht durch Messung der drei Winkel eines Dreieckes darüber in's Reine bringen.

Schneiden wir zu diesem Behufe ein Dreieck in Papier aus, und von demselben die drei Winkel a, b, c ab. Wenn wir jetzt diese drei Winkel mit ihren Scheiteln in einen Punkt zusammenstoßen, und die Schenkel der Winkel genau an einander legen, wie dieß Fig. 28 dargestellt ist, so entsteht gleichsam ein Winkel, der den drei ersten zusammen gleich ist, und den wir nun messen wollen. Allein bei näherer Betrachtung sehen wir, daß die zwei denselben bildenden Schenkel OM und ON in einer geraden Linie liegen. Die drei Winkel machen also zusammen zwei Rechte aus; denn, wenn ich auf der Geraden MN im Punkte O eine Senkrechte errichte, so werden zwei Winkel POM und PON gebildet, deren jeder ein rechter, und die zusammen den drei Winkeln a, b, c gleich sind. Und dieß gilt von jedem Dreieck, es mag was immer für eine Gestalt haben.

Eine andere Art, sich von der Wahrheit des hier Gesagten zu überzeugen, besteht darin, daß man die drei Winkel eines in Papier ausgeschnittenen Dreieckes auf eine der Seiten zusammenbiegt, so daß ihre Scheitel sich auf dieser Linie alle in einem Punkte befinden. Thut man dieß nur mit einiger Vorsicht, so findet man, daß die Winkel mit ihren beisammen liegenden Schenkeln genau an einander stoßen, und die äußeren Schenkel der beiden zu unterst liegenden Winkel genau in jene Seite des Dreieckes fallen, zum Beweise, daß die drei Winkel zusammen wirklich zwei Rechten gleich sind.

Es drückt dieser Satz eine der merkwürdigsten Eigenschaften eines Dreieckes aus. Er soll von Pythagoras gefunden worden seyn, lang vor Euclid, und wurde seiner Allgemeinheit und seines Nutzens wegen, viel bewundert. Glücklicherweise ist auch der strenge Beweis dafür, ganz wie ihn Euclid gibt, so einfach, daß wir keinen Anstand nehmen, ihn hier mitzutheilen:

Zieht man durch den Scheitel des Winkels a eines Dreieckes Fig. 29 eine Gerade MN, die zur Seite A des Dreieckes parallel ist, so bildet diese Gerade mit den Seiten des Dreieckes zwei Winkel m und n. Da nun MN parallel ist zu A, so müssen die Winkel m und b, als Wechselwinkel (29), einander gleich seyn. Dasselbe gilt von den Winkeln n und c. Die drei Winkel m, a, n sind also die drei Winkel des Dreieckes, ganz auf dieselbe Art in

Bezug auf die Gerade MN angeordnet, wie es oben Fig. 28 der Fall war, wo wir die drei Winkel a, b, c gleich zwei Rechten fanden. Die drei Winkel eines Dreieckes sind daher zusammen stets gleich zwei Rechten.

Dieser berühmte Lehrsatz ist nicht minder merkwürdig seines unerwarteten Inhaltes, als der außerordentlichen Menge von Anwendungen und Folgerungen wegen, die aus ihm hervorgehen. Wir wollen hier einige der wichtigsten mittheilen.

39.

Ein Dreieck kann nie mehr als einen rechten Winkel haben; denn, da alle drei Winkel eines Dreieckes zusammen immer zwei Rechten gleich sind, so müssen je zwei derselben zusammen kleiner, als zwei Rechte seyn. Ein solches Dreieck heißt ein rechtwinkliges.

40.

Noch viel weniger kann ein Dreieck einen rechten und einen stumpfen Winkel haben, da der letzte noch größer ist, als ein rechter.

41.

Eben so wenig kann ein Dreieck zwei stumpfe Winkel haben, da dann diese mit einander, ohne den dritten Winkel, schon größer wären, als zwei Rechte.

42.

Wenn also in einem Dreiecke ein rechter oder ein stumpfer Winkel vorkommt, so müssen die beiden anderen Winkel spitze seyn.

43.

Wenn zwei Winkel eines Dreieckes zusammen einem rechten Winkel gleich sind, so muß der dritte Winkel ein rechter seyn, da alle drei Winkel zwei rechte geben sollen.

44.

Zieht man in einer vierseitigen Figur ABCD Fig. 30 von einem Winkel zu einem gegenüberliegenden eine Gerade AC, so zerfällt die Figur in zwei Dreiecke ABC und ADC, und die sechs Winkel dieser Dreiecke werden von den vier Winkeln der vierseitigen Figur gebildet; daraus folgt aber unmittelbar, daß diese Winkel der vierseitigen Figur zusammen vier Rechte ausmachen, und da jenes Zerfällen in zwei Dreiecke stets Statt finden kann, so gilt dieß allgemein von jeder vierseitigen Figur, ihre einzelnen Seiten und Winkel mögen wie immer beschaffen seyn.

Diese nicht minder merkwürdige Eigenschaft von Vierecken, wie die oben bemerkte bei Dreiecken begreift sich auch ganz leicht, wenn man z. B. vier Lineale an ihren Endpunkten um Stifte drehbar verbindet, so daß sie eine vierseitige Figur bilden, deren ganze Gestalt man augenblicklich ändern kann, wenn man ein oder das andere Eck derselben verschiebt. Allein bei dieser Verschiebung sieht man sogleich, daß man keinen der vier Winkel verkleinern kann, ohne einen andern zu vergrößern und umge-

kehrt, daß also die Summe der vier Winkel (38) wahrscheinlich stets dieselbe bleibe. Man sieht aber auch zugleich an diesem Beispiele den Vorzug einer mathematischen Beweisart; während man auf dem eben angezeigten Wege nur die Wahrscheinlichkeit einer solchen Eigenschaft der Vierecke erfährt, und sich hier erst in umständliche Messungen einlassen muß, um am Ende doch nicht vollkommen überzeugt zu seyn, gibt unsere obige einfache Betrachtung nicht nur den höchsten Grad von Gewißheit, sondern zugleich den Werth der beständigen Summe der Winkel eines Viereckes.

45.

Eine fünfseitige Figur ABCDE Fig. 31 kann man ebenso stets in drei Dreiecke zerfällen; es werden also die Winkel einer fünfseitigen Figur zusammen immer gleich sechs Rechten seyn.

46.

Eine sechsseitige Figur werden wir auf gleiche Weise Fig. 32 durch drei Gerade AC, AD, AE stets in vier Dreiecke zerlegen können, ebenso eine siebenseitige Figur in fünf Dreiecke, eine achtseitige in sechs u. s. w.

Vergleichen wir nun bei jeder einzelnen der hier betrachteten Figuren die Anzahl Seiten der Figur mit der Anzahl Dreiecke, in die man dieselbe zerfällen kann, so ergibt sich daraus, daß die letzte immer um zwei geringer ist, als die erste. Dieß

wird nun für alle Figuren gelten, da es seinen Grund offenbar darin hat, daß für jedes der Dreiecke, in welche man die Figur zerfällt, eine Seite der Figur in Anspruch genommen wird, ausgenommen die beiden äußersten Dreiecke, deren jedes zwei Seiten der Figur in Anspruch nimmt. Es wird also z. B. eine zwölfseitige Figur in zehn Dreiecke zerfällt werden können, und folglich werden, da die Winkel jedes Dreieckes zwei Rechten gleich sind, die Winkel einer zwölfseitigen Figur zusammen stets zwanzig Rechte bilden.

Es ergibt sich also daraus folgende allgemeine Regel für die Bestimmung der Summe der Winkel einer vielseitigen Figur:

Man vermindere die Zahl der Seiten der fraglichen Figur um zwei, multiplizire den Rest mit zwei, um sofort die Anzahl rechter Winkel zu erhalten, welcher alle Winkel der Figur zusammen gleich sind.

Es gibt uns übrigens das eben Gesagte ein Beispiel von der Richtigkeit unserer obigen Bemerkung (16), wie sehr nämlich durch die Lehre von den Dreiecken die Betrachtungen der übrigen Figuren vereinfacht werden, wie denn hier der einzige Satz über die Summe der drei Winkel eines Dreieckes analoge Eigenschaften bei jeder von geraden Linien gebildeten Figur uns mit der größten Leichtigkeit kennen lehrte, die auf anderen Wegen zu erforschen gewiß sehr schwierig und umständlich gewesen wäre.

47.

Wenn zwei Winkel eines Dreieckes zwei Winkeln eines anderen gleich sind, so müssen auch die dritten Winkel einander gleich sein, denn von beiden dritten Winkeln muß jeder zu jenen zwei Winkeln gefügt zwei Rechte ausmachen.

48.

Wenn man also von zwei Dreiecken nachweisen will, daß sie durchaus gleiche Winkel haben, so hat man dieß nur von zwei Winkeln zu thun nöthig, da sich die Gleichheit des dritten dann von selbst versteht.

49.

Wenn ein und dasselbe Dreieck drei unter einander gleiche Winkel hat, so muß jeder derselben einem Drittheile von zwei Rechten, oder zwei Drittheile eines Rechten betragen.

50.

Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes beträgt also zwei Drittheile eines Rechten, da nach (27) bei einem gleichseitigen Dreiecke stets auch die Winkel unter einander gleich sind.

51.

Daß wir übrigens oben (49) zwei Dritttheile von einem Rechten einem Drittheile von zwei

Rechten gleich setzen, bedarf wohl kaum einer weiteren Erklärung: denn drei Drittheile eines Rechten machen einen Rechten, sechs Drittheile also zwei Rechte; davon aber beträgt das Drittheil zwei Drittheile eines Rechten.

Fünfter Abschnitt.

Abhängigkeit der Größe der Seite eines Dreiecks von der Größe des gegenüberliegenden Winkels. — Grenzen der Summe und Differenz zweier Seiten im Vergleiche mit der dritten Seite.

52.

Betrachten wir die Fig. 33, 34, u. 35 verzeichneten Dreiecke, in welchen, wie man sieht, die mit A bezeichneten Seiten, so wie die mit B bezeichneten einander gleich sind, jedoch sehr verschiedene Winkel c einschließen, den kleinsten in Fig. 33, einen größeren in Fig. 34, den größten in Fig. 35. Die diesem Winkel c gegenüberliegende Seite nimmt ebenfalls stets zu, gerade so, als wenn man die Backen einer Scheere mehr und mehr öffnet, die Spitzen derselben sich gleichfalls immer mehr und mehr von einander entfernen, wobei man, um das Gleichniß unserem Falle ganz ähnlich zu machen, die eine Backe als gebrochen, also gegen die andere ungleich lang an=

nehmen kann; daraus ergibt sich denn folgender Lehrsatz, zu dem Euclid eines ziemlich umständlichen Beweises bedarf:

Wenn zwei oder mehrere Dreiecke je zwei Seiten gleich haben, wie hier die Seiten A und B, so ist die dritte Seite C größer oder kleiner, je nachdem der gegenüberliegende Winkel größer oder kleiner ist.

53.

Wenn man die Seiten A und B einander nähert, bis der Winkel c verschwindet, was wird dann aus der Seite C? — Betrachten wir wieder unser Gleichniß mit der Scheere; wenn ihre Backen gleich lang sind, und ich schließe sie, so fallen die Spitzen zusammen, ihre Distanz, oder die Seite C des Dreieckes ist null; wenn aber die Backen ungleich lang sind, und ich schließe sie, so wird die Distanz der Spitzen, d. h. die Seite C des obigen Dreieckes offenbar dem Unterschiede der beiden Backen d. h. den Seiten A und B gleich seyn.

Wenn man hingegen die Seiten A und B von einander entfernt, bis sie in dieselbe gerade Gerade zu stehen kommen, wie dieß Fig. 36 der Fall ist, wie gestaltet sich dann die Seite C? — Dieselbe wird dann offenbar gleich der Summe der beiden Seiten A und B.

Daraus sehen wir, daß, indem man zwei Seiten eines Dreieckes von einander entfernt, die dritte

Seite immer größer, und endlich der Summe jener beiden Seiten gleich wird; diesen Werth aber kann sie nicht überschreiten. Nähert man aber zwei Seiten eines Dreieckes einander, so wird die dritte Seite immer kleiner, und endlich dem Unterschiede jener beiden Seiten gleich; unter diesen Werth kann sie nicht abnehmen.

Da aber die beiden Grenzwerthe nicht einmal erreicht werden dürfen, wenn die Figur nicht aufhören soll, ein Dreieck zu seyn, und z. B. für den ersten Fall höchstens von einem sehr gestreckten Dreiecke, wie Fig. 37 es darstellt, die Rede seyn kann, in welchem die Seite C der Summe der Seiten A und B nahe, wenn auch nicht genau gleich ist, so erhalten wir dadurch folgenden Lehrsatz:

54.

In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer, und ihr Unterschied kleiner, als die dritte Seite.

Sechster Abschnitt.

Parallele Linien. — Parallelogram. — Aenderungen der Winkel bei ungeänderten Seiten. — Die einander gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich. — Parallel-Lineal. — Diagonalen. — Rechtecke. — Verschiedene Eigenschaften der Parallelograme.

55.

Gesetzt es wären uns vier Streifen von Kartenpapier Fig. 38 gegeben, von denen immer je zwei, A und A′, so wie B und B′, einander gleich sind, und man bilde daraus eine vierseitige Figur Fig. 39 so, daß die gleichen Seiten einander gegenüber stehen, und man sie doch sämmtlich etwa um Stifte, die sie in den Ecken verbinden, drehen kann, beiläufig wie die Backen einer Scheere. Wir sehen, daß der Figur auf diese Art die mannigfaltigsten Gestalten gegeben werden können, wovon Fig. 40 uns ein Beispiel zeigt *).

Schon der erste Anblick zeigt, daß die gegenüberliegenden Seiten dieser Figur, aller eben erwähnter Verschiebungen ungeachtet, stets parallel zu bleiben scheinen. Wir könnten hiervon wieder z. B. durch

*) Wären nur drei Streifen mit einander verbunden, so wäre diese Veränderlichkeit der Figur nicht vorhanden, und die einzelnen Streifen hielten vollkommen fest; bei jeder mehrseitigen Figur hingegen tritt jene Veränderlichkeit ein.

unmittelbare Messung des senkrechten Abstandes zweier solcher gegenüberliegenden Seiten in verschiedenen Punkten derselben, der nach (29) überall gleich ausfallen müßte, uns überzeugen, allein der folgende geometrische Beweis dafür wird viel einfacher und schlagender zugleich seyn.

Sey ABCD eine solche vierseitige Figur Fig. 41 und ziehen wir von B nach D eine Gerade, welche jene vierseitige Figur in zwei Dreiecke theilt. Die Seite BD ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich, die Seite AB ist gleich der Seite CD, der Annahme zufolge, und ebenso die Seite BC der Seite AD. Die beiden Dreiecke haben also gleiche Seiten, folglich sind sie congruent, und daher auch die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich (19). Es ist also der Winkel DBC gleich dem Winkel BDA; da diese Winkel aber für die schneidende Linie BD Wechselwinkel sind (30), so müssen die Seiten BC und AD parallel seyn. Dasselbe folgt für die Seiten AB und CD aus der Gleichheit der Winkel BDC und DBA. Es sind also die einander gegenüber liegenden Seiten einer solchen Figur parallel.

56.

Die Linie BD, die von einem Winkel der Figur zum anderen gezogen wurde, heißt Diagonale.

57.

Da, wenn die Seiten des Viereckes Fig. 41 aufhören, paarweise gleich zu seyn, die Congruenz

der beiden Dreiecke, und somit auch die Gleichheit der Wechselwinkel an der Diagonale aufhört, so werden dann auch die einander gegenüber liegenden Seiten nicht mehr durchaus parallel seyn, und man wird höchstens für eine gewisse Stellung der Seiten zwei derselben, aber durchaus nicht alle vier, paarweise parallel machen können. Es bleiben daher nur in einer solchen vierseitigen Figur, in der die gegenüber liegenden Seiten durchaus gleich sind, dieselben auch durchaus zu einander parallel.

58.

Diese Figur kommt sowohl in der Geometrie, als im gemeinen Leben sehr häufig vor, und hat von ihrer Haupteigenschaft, die gegenüber liegenden Seiten stets parallel zu haben, den eigenen Namen: Parallelogram erhalten. Thüren, Fenster, Wände, Fußböden u. s. w. sind durchaus in Parallelogramen, und zwar meistens in solchen gestaltet, deren Winkel durchaus Rechte sind. Auch ist eine kleine Vorrichtung, die wohl jeder unserer Leser unter dem Namen des Parallel-Lineales kennt, im Grunde nur eine Anwendung der eben betrachteten Eigenschaft des Parallelograms. Es besteht dasselbe nämlich in zwei Linealen AB und CD Fig. 42, die durch zwei gleich lange Stücke EF und GH verbunden sind; diese Stücke drehen sich um Stifte, die in gleichen Entfernungen EH und FG

von einander auf beiden Linealen sich befinden. Man mag nun die beiden Lineale wie immer von einander entfernen, oder einander nähern, stets bleiben sie parallel, so daß, wenn man das eine derselben an eine auf dem Papier verzeichnete gerade Linie anlegt, eine längs dem anderen Lineale gezogene Gerade zur ersten stets parallel ist. Die Richtigkeit dieses Instrumentes hängt, wie wir aus obigem wissen, von der Gleichheit der Abstände EH und FG, und der Stücke EF und HG ab.

59.

Das am meisten vorkommende Parallelogram ist dasjenige, dessen Winkel durchaus Rechte sind, es heißt Rechteck.

Dabei muß Jedermann auffallen, daß die Winkel solcher Rechtecke durchaus Rechte sind, und man nicht etwa bloß einen Winkel einen rechten, die übrigen aber stumpf oder spitz seyn lassen kann. Bei näherer Betrachtung aber findet man diesen Umstand als unzertrennlich von der Eigenschaft eines Parallelogrames. Sey ABCD Fig. 43 eine solche Figur und B ein rechter Winkel, so muß schon wegen der Congruenz der Dreiecke ABD und ACD (55) der gegenüber liegende Winkel C ebenfalls ein rechter seyn; aber auch die Winkel D und A sind nothwendig Rechte; denn jeder derselben ist durch die Diagonale AD in zwei Winkel getheilt, deren einer ein Winkel von einem der beiden Dreiecke an der Seite AD, und

deren anderer dem anderen Winkel desselben Dreieckes an derselben Seite AD gleich ist. Die zwei Winkel, in die sowohl A als D durch die Diagonale getheilt wird, machen also auch zusammen gerade so viel aus, als die beiden Winkel an der Seite AD in jedem der zwei Dreiecke. Diese Dreiecke aber haben jedes einen rechten Winkel, eines in B und das andere in C; es müssen also die beiden anderen Winkel (43) jedes Dreieckes, somit auch die zwei Winkel, aus denen jeder der Winkel A und D besteht, zusammen einen Rechten bilden. Sobald demnach in einem Parallelograme nur ein rechter Winkel B vorkommt, müssen alle übrigen Winkel desselben benfalls Rechte, und das Parallelogram ein Rechteck seyn. Man kann stets je zwei Winkel an einer Seite eines Parallelogrames als innere Gegenwinkel (33) betrachten; je zwei Winkel an einer Seite eines Parallelogrames machen also zusammen immer zwei Rechte (34), oder die Hälfte des Gesammtbetrages (44) der vier Winkel eines Parallelogrammes aus. Auch daraus folgt, was wir oben eben auf andere Weise ableiteten, nämlich, daß, wenn ein Winkel ein rechter ist, es alle übrigen ebenfalls seyn müssen; denn der zunächst liegende Winkel der Figur muß mit dem Rechten zwei Rechte machen, selbst also auch ein Rechter seyn; dasselbe gilt vom dritten in Beziehung auf den zweiten Winkel u. s. f. Allein es folgt daraus noch weiter, daß, wie wir schon oben (43) erwähnten, wenn man die

Winkel eines Parallelogrames ändert, ein Winkel immer gerade so viel zu-, als der ihm nächste Winkel abnimmt, und umgekehrt, oder daß je zwei gegenüber liegende Winkel stets einander gleich bleiben, da nämlich diese Winkel im Rechtecke einander offenbar gleich sind, und dann immer zu gleicher Zeit und in gleichem Maaße wachsen und abnehmen. Endlich sehen wir daraus auch, daß ein Parallelogram nicht durchaus spitze Winkel haben kann; denn je zwei spitze Winkel können nicht zwei Rechten gleich seyn; sondern wenn der eine ein spitzer, muß der nächste ein stumpfer, der dritte wieder ein spitzer, der vierte ein stumpfer seyn.

Wir wollen der besseren Uebersicht wegen die wichtigsten der eben abgeleiteten Sätze über das Parallelogram hier zusammenstellen:

60.

1. Die einander gegenüber liegenden Seiten sind gleich.

61.

2. Ebenso die einander gegenüber liegenden Winkel.

62.

3. Je zwei einander nächste Winkel machen zusammen zwei Rechte.

63.

4. Jede Diagonale theilt das Parallelogram in zwei congruente Dreiecke.

64.

5. Ist ein Winkel ein Rechter, so müssen es alle seyn, und das Parallelogram ist ein Rechteck.

Siebenter Abschnitt.

Bestimmung des Flächeninhaltes eines Parallelograms. — Zerfällung gleicher Parallelograme.

65.

Man verzeichne über derselben Linie AD Fig. 44 mehrere Parallelograme so, daß ihre obere Seiten BC alle in einer zu AD parallelen Geraden liegen, während das erste Parallelogram ein Rechteck ist, und die anderen Figuren immer schiefere Lagen erhalten. Man sagt von solchen Figuren, daß sie gleiche Basis und gleiche Höhe haben, wo man unter Basis die allen gemeinschaftliche Seite AD und unter Höhe eine Senkrechte von der oberen Seite BC auf die untere AD oder auf deren Verlängerung versteht, welche offenbar für alle diese Figuren dieselbe und zwar gleich der Seite CD des Rechteckes ist (28).

Welche dieser Figuren hat nun wohl den größten Flächenraum? wenn z. B. jede von ihnen die

Gestalt des Fußbodens eines Zimmers angäbe, für welches derselben bedürfte man am meisten Teppiche, um den Boden zu bedecken? Die Entscheidung dieser Frage scheint für den ersten Augenblick nicht so leicht, da die schiefen Figuren zwar immer länger, aber auch immer schmäler werden.

Denken wir uns einen Pack Spielkarten, und stelle uns Fig. 45 eine Seitenfläche dieses Packes vor, wenn die Karten alle senkrecht über einander geschlichtet sind. Diese Figur wird offenbar ein Rechteck seyn, und ihr Flächenraum von der Anzahl und Länge der Karten abhängen.

Verschieben wir nun die Karten, so daß dieselbe Seitenfläche jetzt durch Fig. 46 vorgestellt werden kann, also ein Parallelogram ist. Da man weder die Anzahl, noch die Länge der Karten geändert hat, so muß diese neue Figur offenbar denselben Flächenraum, wie jene frühere, haben u. s. f. für jede weitere Verschiebung der Karten.

Was aber hier Anzahl und Länge der Karten, ist bei uns Höhe und Basis der Figur, und es bleibt somit der Flächenraum eines Parallelograms stets derselbe, so lange Höhe und Basis dieselben bleiben, oder man wird, um unser früheres Gleichniß wieder aufzunehmen, für die oben erwähnten verschiedenen Zimmer überall gleich viel Teppichstoff brauchen, um ihre Fußböden zu bedecken.

So klar dieß schon jetzt unseren Lesern seyn mag, so wollen wir doch noch eine zweite Darstellung versuchen.

Seyen Fig. 47 und 48 ein Rechteck und ein Parallelogram von gleicher Basis und gleicher Höhe. Man theile das Parallelogram in drei Theile auf folgende Art: man ziehe eine auf EF senkrechte Linie FI, nehme FK gleich EI, und ziehe von K eine Senkrechte KL auf GH.

Ebenso theile man das Rechteck in drei Theile, indem man BM gleich FI nimmt, dann DO gleich GL, und DN gleich LK, und die Linien AM und NO zieht.

Bezeichnet man die einzelnen Stücke nach der Reihe, wie es hier geschah, mit 1, 2, 3 in beiden Figuren, so kann man schon hier geometrisch die Gleichheit der Dreiecke 1 und 3 nachweisen. Denn für 1 im Rechtecke sind zwei Seiten MB und AB und der eingeschlossene Winkel B den zwei Seiten IF und EF von 1 im Parallelograme mit dem eingeschlossenen rechten Winkel gleich, folglich beide Dreiecke 1 congruent, u. s. f. für 3; durch weitere zweckmäßige Zerfällung der Räume 2 wird man im Parallelograme Figuren erzeugen, für deren jede eine congruente im Rechtecke nachzuweisen ist. Indeß gelangen wir viel schneller zum Ziele, wenn wir bei der bisher ausgeführten Zerfällung stehen bleiben, und die Figuren demgemäß in Papier ausschneiden, wo wir dann sehen, daß die mit denselben

Ziffern bezeichneten Stücke sich genau decken, also wirklich Rechteck, wie Parallelogram, gleichen Flächenraum haben.

Diese Zerfällung wird nicht immer dieselbe bleiben, aber stets wird eine solche möglich seyn. Betrachten wir z. B. das sehr geneigte Parallelogram Fig. 49, und das Rechteck Fig. 50 von gleicher Basis und Höhe, so reichen wir hier mit obiger Zerfällung nicht mehr aus, und müssen beide auf folgende Art in fünf Theile theilen, um zum Ziele zu gelangen:

Man ziehe in Fig. 49, wie früher, FI senkrecht auf FE, nehme FK gleich EI, ziehe KL parallel mit FI, nehme KM gleich EI, und ziehe MN parallel zu FI, nehme MO gleich EI, und ziehe OP parallel zu FI, und bezeichne endlich die so entstandenen Figuren nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5.

Ebenso nehme man in Fig. 50 BQ gleich FI, und ziehe AQ, nehme ferner AR gleich BQ, und ziehe RS parallel zu AQ, nehme wieder RT gleich BQ, und ziehe TU parallel zu AQ, endlich nehme man TV gleich BQ, und ziehe VW parallel zu AQ, und bezeichne die so entstandenen Figuren nach der Reihe mit 1, 2, 3, 4, 5.

Schon aus der bloßen Ansicht dieser Figuren sieht man, daß die im Parallelogram und im Rechtecke gleich bezeichneten Stücke einander auch gleich sind, nud kann sich davon überdieß durch Deckung überzeugen.

Parallelograme haben also gleichen Flächenraum, wenn sie gleiche Basis und gleiche Höhen haben.

Achter Abschnitt.

Numerischer Ausdruck des Flächeninhaltes eines Parallelogrames. — Seine Zerfällung in Quadrate. — Parallelograme lassen sich stets auf Rechtecke bringen. — Numerischer Ausdruck für die Fläche eines Dreiecks. — Für die Fläche anderer Figuren.

66.

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, daß die Größe eines Parallelograms oder besser der Raum, den die Seiten eines Parallelograms umfassen, lediglich von seiner Basis und Höhe, und durchaus nicht von weiteren Eigenschaften seiner Gestalt abhängt. Dieser Umstand setzt uns in den Stand, die Größe aller von geraden Linien eingeschlossenen Figuren auf eine äußerst einfache Art zu bestimmen.

Versuchen wir dieß zuerst mit einem Rechtecke Fig. 51, welches das verjüngte Bild eines größeren Rechteckes vorstelle, dessen Basis AB z. B. drei Zolle, und dessen Höhe AD fünf Zolle beträgt. Es seyen diese Zolle wieder im verjüngten Maaßstabe

auf die beiden Seiten AB und AD, wie man dieß hier sieht, durch die Punkte E, F und G, H, I, K aufgetragen.

Durch die Theilung der Linie AB zerfällt das Rechteck, wenn man die Linien EL, FM senkrecht auf AB zieht, in drei schmale Rechtecke AELD, EFML, und FBNM, die einander gleich sind, da sie gleiche Basis und gleiche Höhe haben.

Durch die Theilung der Linie AD zerfallen diese schmalen Rechtecke, wenn man die Linien KO, IP, HQ, GR senkrecht auf AD zieht, jedes in fünf noch kleinere Rechtecke, die wieder einander gleich sind, da sie alle einen Zoll hoch und einen Zoll breit sind. Solche Rechtecke aber, die eben so breit, als hoch sind, nennt man Quadrate, und wenn, wie hier, eine Seite einen Zoll beträgt, Quadratzolle; beträgt eine Seite einen Fuß, so heißen sie Quadratfuße u. s. w.

Unser ursprüngliches Rechteck ABND, das zur Basis 3 Zolle, und zur Höhe 5 Zolle hat, enthält 15 Quadratzolle, denn es kommen in demselben drei senkrechte Reihen von Quadratzollen vor, deren jede fünf Quadratzolle faßt.

Würde das Rechteck ABND eine Basis von vier Zollen haben, so gäbe es vier solcher senkrechter Reihen, deren jede fünf Quadratzolle hat, und das Rechteck ABND enthielte viermal fünf oder zwanzig Quadratzolle.

Wenn man also den Raum bestimmen will, den ein Rechteck mit seinen Seiten umfaßt, so darf man nur wissen, wie viele Zolle, Fuße u. s. w. die Basis, und wie viel Zolle, Fuße u. s. w. die Höhe desselben hat. Das Produkt dieser beiden Zahlen wird die Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. s. w. geben, welche das Rechteck enthält. So wird z. B. ein Rechteck, dessen Basis 10 Zolle, und dessen Höhe 15 Zolle mißt, 150 Quadratzolle enthalten.

67.

Da uns aber aus dem Vorhergehenden bekannt ist, daß Parallelograme mit Rechtecken gleichen Raum umfassen, wenn sie mit denselben gleiche Basis und Höhe haben, so wird die eben gegebene Regel auch für Parallelograme gelten, und man wird allgemein den Raum eines Parallelogrames, mag dasselbe rechtwinklig oder schiefwinklig seyn, finden, indem man die Basis desselben mit der Höhe multiplicirt. Die so erhaltene Zahl aber wird Quadratzolle oder Quadratfuße u. s. w. geben, je nachdem man die Basis und Höhe der Figur in Zollen oder Fußen u. s. w. gemessen hat.

68.

Aus 55. wissen wir, daß ein Parallelogram immer in zwei einander gleiche Dreiecke zerlegt werden kann, oder, was dasselbe ist, daß man

sich ein Dreieck stets als die Hälfte eines Parallelogrames denken kann, das eine Seite des Dreieckes zur Basis, und die Höhe des Dreieckes zur Höhe hat (wo man unter Höhe des Dreieckes die Senkrechte von dem Scheitel des der Basis gegenüber liegenden Winkels auf die Basis oder deren Verlängerung zu verstehen hat). In der That kann man mit jedem Dreiecke, indem man ein congruentes schicklich an dasselbe anlegt, ein Parallelogram bilden. Es wird demnach der Flächeninhalt, wie man den von einer Figur eingenommenen Raum nennt, eines Dreieckes dem halben Produkte der Basis in die Höhe des Dreiecks gleich seyn. Wenn z. B. die Basis des Dreiecks 4 Zoll, die Höhe 5 Zoll beträgt, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes 10 Quadratzolle.

69.

Man kann aber mit derselben Basis und Höhe eine Menge Dreiecke Fig. 52 construiren, die also alle gleichen Flächeninhalt haben. So sonderbar dieß beim ersten Anblicke der verschiedenen Gestalten dieser Figuren scheint, so natürlich erklärt es sich doch auch wieder aus dem Ersatze durch größere Länge bei kleinerer Breite der Figur und umgekehrt.

Ein anderer scheinbarer Anstand ergibt sich aus der Betrachtung, daß man bald die, bald jene Seite eines Dreieckes als Basis annehmen kann, und doch immer denselben Flächeninhalt bekommen

soll. Allein auch hier findet eine Ausgleichung eben dadurch statt, daß auch die Höhe des Dreieckes immer wieder verschieden ausfällt, wenn man andere Seiten zu Basen wählt, am größten wird, wenn man die kleinste Seite zur Basis nimmt, und am kleinsten, wenn man die größte dazu macht. Betrachten wir z. B. das Dreieck ABC Fig. 53, und suchen wir zuerst seinen Flächeninhalt in derjenigen Stellung desselben, wo die Seite AB als Basis erscheint. Gesetzt, diese Seite AB habe neun Zolle, was wir hier durch die Theilungspunkte anzeigten. Um die Höhe des Dreieckes für diese Lage desselben zu finden, verlängere man nach 68 die Seite AB über D hinaus, und fälle von C eine Senkrechte CD, welche uns nun die Höhe des Dreieckes vorstellt. Diese Linie CD aber enthält genau zwei solcher Theile, wie die Linie AB ihrer neun hatte, ist also zwei Zolle lang, wenn jene neun Zolle hatte. Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt also die Hälfte von achtzehn oder neun Quadratzolle.

Dreht man nun das Dreieck um, so daß die Seite AC, die drei Zolle mißt, nach unten zu liegen kommt, und also jetzt die Basis vorstellt, so wird man nun diese Seite verlängern, und BE senkrecht darauf fällen, und es ist die Linie BE die Höhe des Dreieckes für diese neue Lage desselben. Diese Linie aber enthält genau sechs solcher Theile, wie AB neun, und AC drei enthielt, ist also sechs Zolle lang, wenn ein solcher Theil einen Zoll

vorstellt. Die Basis des Dreieckes hat also jetzt drei Zolle, die Höhe sechs Zolle; der Flächeninhalt des Dreieckes beträgt daher wieder, genau wie früher, die Hälfte von achtzehn oder neun Quadratzollen.

Dasselbe Resultat fände man endlich, wenn man die dritte Seite BC als Basis annähme, wo dann die von A auf BC senkrechte Linie AF die Höhe vorstellte; nur werden dann diese beiden Linien nicht wie in den beiden eben betrachteten Fällen eine ganze Anzahl Zolle, sondern überdieß gewisse Bruchtheile von Zollen enthalten, aber immer wird das halbe Produkt der beiden Zahlen gleich neun (Quadratzollen) seyn.

70.

Da sich jede von geraden Linien gebildete Figur in Dreiecke zerlegen läßt (44 u. f.), so kann man, wenn man einmal den Flächeninhalt eines Dreieckes bestimmen kann, auch den jeder anderen Figur angeben, indem man die Flächeninhalte der dieselbe bildenden Dreiecke summirt. Es ist dieß ein weiterer Beweis davon, wie wichtig es ist, die Natur eines Dreieckes früher zu untersuchen, bevor man auf die Betrachtung anderer Figuren übergeht.

71.

Nach 66. ist ein Quadrat ein Rechteck mit durchaus gleichen Seiten. Wenn also die Basis eines Quadrates z. B. fünf Zolle hat, so hat auch seine Höhe fünf Zolle, und das Quadrat enthält

fünfmal fünf oder fünf und zwanzig Quadratzolle. Um daher den Flächeninhalt eines Quadrates zu erhalten, hat man nur die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. einer Seite desselben mit sich selbst zu multipliciren, und erhält sofort die Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. s. w., welche das Quadrat enthält.

Hierin liegt der Grund, weßhalb man in der Arithmetik das Produkt einer Zahl mit sich selbst das Quadrat derselben nennt. So heißen die Zahlen 4, 9, 16, 25, 36 u. s. w. die Quadrate der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6 u. s. w., weil, wenn die letzten Zahlen das Ausmaaß der Seite eines Quadrates bedeuten, jene die Größe oder den Flächeninhalt des ganzen Quadrates geben.

Neunter Abschnitt.

Merkwürdige Eigenschaften eines rechtwinkligen Dreieckes. — Die Quadrate der Katheten zusammen gleich dem Quadrate der Hypothenuse (Eselsbrücke). — Beweis durch Zerfällung. — Andere Beweise. — Zerfällung des Quadrates einer eingetheilten Linie. — Um wie viel übersteigt das Quadrat der Linie die Quadrate ihrer Theile?

72.

Eine der merkwürdigsten Entdeckungen in der Mathematik bezieht sich auf eine Eigenschaft der

Quadrate über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes (38), die wir nun im Folgenden kennen lernen wollen.

Man nennt die Seite eines rechtwinkligen Dreieckes, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, die Hypothenuse. Wir haben nun hier Fig. 54 mehrere rechtwinklige Dreiecke mit derselben Hypothenuse AB verzeichnet. Man sieht, daß wie eine der beiden veränderlichen Seiten AC und BC abnimmt, die andere wächst und umgekehrt. Von ähnlichen Fällen, die wir schon früher kennen lernten, zu schließen, ist man für den ersten Anblick verleitet, zu glauben, daß die Summe dieser beiden Seiten stets dieselbe ist; allein schon bei einer nur etwas genaueren Untersuchung überzeugt man sich von der Irrigkeit dieser Voraussetzung.

Verzeichnet man hingegen auf den Seiten AC und BC, die man Katheten nennt, Quadrate, so findet man, daß die Summe der Flächeninhalte dieser Quadrate stets dieselbe, und zwar immer dem Flächeninhalte des über der Hypothenuse construirten Quadrates gleich ist.

Man schneide sich drei gerade Papierstreifen zu, den einen drei, den andern vier, und den dritten fünf Zolle lang, und lege sie in ein Dreieck zusammen, so bemerkt man, daß der von den beiden kürzeren Seiten eingeschlossene Winkel ein rechter, und folglich jenes Dreieck ein rechtwinkliges ist. Verzeichnet man nun über jede der Seiten ein Quadrat, so

fassen diese Quadrate nach der Reihe neun, sechszehn und fünf und zwanzig Quadratzolle, und es ist wirklich die Summe der Quadrate der Katheten (nämlich 9 und 16 Quadratzolle) gleich dem Quadrat der Hypothenuse (nämlich 25 Quadratzollen).

Schneidet man sich ebenso drei andere Streifen von Papier aus, die nach der Reihe 5, 12 und 13 Zolle lang sind, so findet man erstens wieder, daß, wenn man dieselben zu einem Dreiecke zusammenlegt, der von den kürzeren Seiten gebildete Winkel ein rechter ist, und zweitens, daß die Summe der Quadrate dieser beiden Katheten (nämlich 25 Quadratzolle und 144 Quadratzolle) dem Quadrate der Hypothenuse (nämlich 169 Quadratzollen) gleich kommt. Schon diese beiden einzelnen Fälle geben einen ziemlich klaren Begriff von der Richtigkeit des Satzes, aber wir wollen uns von der allgemeinen Gültigkeit desselben auf einem ähnlichen Wege, wie eben bei den Parallelogramen (65), zu überzeugen suchen.

Wir haben hier ein genau rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 55) verzeichnet, und auf die Seiten desselben Quadrate errichtet. Theilen wir nun zuerst das Quadrat über der Kathete AC in drei Theile 1, 2, 3, indem wir von D eine Linie DE parallel zu AB, und von A eine Linie AF senkrecht auf DE führen. Ferner werde das Quadrat über der Kathete BC in vier Theile 4, 5, 6, 7 dadurch getheilt, daß man von G eine Linie GH parallel zu AB, und

von B eine Linie BI senkrecht auf GH führt, ferner einen Abstand GK gleich BH nimmt, und eine Linie KL parallel zu GH, oder was dasselbe ist, zu AB zieht. Endlich zerschneide man das Quadrat über der Hypothenuse AB in sieben Stücke 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, indem man zuerst von C eine auf AB senkrechte Linie CP führt, welche das Quadrat der Hypothenuse in zwei länglichte Rechtecke theilt; dann ziehe man von N eine Linie NM parallel zu AC, und verbinde die Punkte M und R, verlängere weiter die Linie DA bis sie auf NM trifft, und ebenso die Linie BG bis sie OP schneidet, nehme endlich einen Abstand RS gleich KL, und ziehe SQ senkrechtauf MR.

Vergleicht man nun die vielen kleinen Figuren, die auf diese Art entstanden, mit einander, so findet man, daß die mit gleichen Ziffern bezeichneten auch einander vollkommen gleich sind, und daß folglich, wenn man die Figuren in den Quadraten der beiden Katheten über die gleichziffrigen in dem Quadrate der Hypothenuse legt, eine vollkommene Deckung dieses letzten hervorgebracht wird, wovon man sich durch Ausschneiden der Figur 55 in allen ihren Theilen leicht überzeugen kann.

Zugleich ist hieraus ersichtlich, daß die von der Linie OP gebildeten Rechtecke stückweise den Quadraten der Katheten gleich sind, da in je zwei dieser Figuren die gleichen Nummern vorkommen.

Eine solche Eintheilung der Quadrate wird im Allgemeinen, wie man von selbst sieht, stets möglich

seyn; da aber doch in manchen Fällen das kleinere Quadrat über BC in mehr als vier Theile, wie es hier geschah, zerlegt werden muß, so wollen wir noch einen anderen Beweis hersetzen, der völlig allgemein ist.

Wir haben in Fig. 56 die drei Quadrate, wie früher, auf den Seiten des rechtwinkligen Dreieckes ABC errichtet, jedoch das Quadrat der Hypothenuse über, statt unter dieselbe gestellt, so daß das Dreieck ABC selbst einen Theil des großen Quadrates bildet.

Schneiden wir nun dieses Dreieck aus, und legen wir es auf die obere Seite DF des großen Quadrates (Fig. 57), so wird offenbar dadurch dieß große Quadrat in eine sechsseitige Figur ADEFBC verwandelt, die einen einspringenden Winkel ACB und einen vorspringenden DEF, übrigens mit dem großen Quadrate gleichen Flächeninhalt hat. Ziehen wir jetzt von C nach E eine Linie, welche diese sechsseitige Figur in zwei Theile theilt, so ist jeder dieser Theile ein Parallelogram; denn das Dreieck hat genau dieselbe Lage auf der oberen Seite des Quadrates, die es früher auf der unteren hatte, d. h. jede Seite des Dreieckes liegt ihrer früheren Stellung parallel, und es ist DE gleich AC, EF gleich CB, und folglich sind die beiden Theile, in welche wir die sechsseitige Figur zerlegten, nothwendig Parallelograme. Ueberdieß aber muß, da DF gleich AB ist, DE in der Linie GH, d. h. der oberen Seite

des Quadrates über AC, und EF in der verlängerten Linie KI, d. h. der oberen Seite des Quadrates über BC liegen. Es hat also das Parallelogram ADEC gleiche Basis AC und gleiche Höhe HC mit dem Quadrate über AC, ist also demselben gleich, und das Parallelogram EFBC hat gleiche Basis BC und gleiche Höhe KC mit dem Quadrate über BC, ist also wieder diesem gleich. Da aber die beiden Parallelograme zusammen die sechsseitige Figur oder das Quadrat über der Hypothenuse AB bilden, so haben wir allgemein den Satz:

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich dem Quadrate der Hypothenuse.

Dieser höchst merkwürdige Satz ist von der größten Anwendung durch das ganze Gebiet der Mathematik, soll um das Jahr 500 vor Christo von Pythagoras gefunden worden seyn, und derselbe den Göttern aus Dankbarkeit dafür, daß sie ihn dazu erkoren, den Menschen diese wichtige Wahrheit zu entschleiern, hundert Ochsen geopfert haben. Da übrigens in der Schule, die Pythagoras gründete, blutige Opfer verboten waren, so ist jene Erzählung ziemlich unwahrscheinlich, und wohl die Erfindung späterer Zeiten, wo man die hohe Bedeutung jenes Satzes erst recht erkannt hatte.

Man nennt diesen Satz die Eselsbrücke, weil man, so einfach er auch hier unseren Lesern geschienen haben mag, von wenig talentirten Leuten dessen

Verständniß nicht erwartete, und der Satz also diesen, wenn sie sich auf das Studium der Geometrie legten, gleichsam ein „bis hierher und nicht weiter“ zurief.

73.

Wenn man eine Linie AB Fig. 58 im Punkte C in zwei Theile AC und CB theilt, und über der ganzen Linie sowohl, als über diese ihre Theile Quadrate errichtet, so muß offenbar, wie eigentlich schon der Augenschein aus der Figur zeigt, die Summe der Quadrate über AC und CB kleiner seyn, als das Quadrat über der ganzen Linie AB; denn wäre die Summe dieser Quadrate gleich dem großen Quadrate, so müßten die Linien AC und BC mit AB ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypothenuse AB wäre, bilden können, was aber unmöglich ist, da AC und BC dazu offenbar zu kurz sind.

Wir wollen nun den Unterschied zwischen dieser Summe der beiden kleinen Quadrate und dem großen Quadrate näher bestimmen. Aus Fig. 58 sieht man, daß dieser Unterschied dem Raume FGHEDI gleich ist, denn dieser Raum bleibt von dem großen Quadrate übrig, wenn man die kleinen in dasselbe hineinsetzt. Verlängern wir die Linie FG, bis sie DE schneidet, so entstehen zwei Rechtecke DF und GE, die einander gleich sind; denn GH ist gleich BC, und BC ist wieder gleich DI, da beide Linien die Reste der gleichen Linie AB und AD vorstellen, wenn man

von denselben die gleichen Stücke AC und AI wegnimmt; ferner ist EH ebenso gleich FI, da diese Linien die Reste der gleichen Seiten BE und AB vorstellen, wenn man von denselben letzten die gleichen Stücke BH und BC wegnimmt; es haben also die beiden Rechtecke DF und GE gleiche Höhe und gleiche Basis. Ueberdieß aber sind die dieselben bildenden Seiten eben die Theile AC und BC, in welche die Linie AB zerfällt wurde. Dieß führt uns zu folgendem im ganzen Gebiete der Mathematik hochwichtigen Satz:

Das Quadrat einer Linie AB übertrifft die Summe der Quadrate über ihren Theilen AC und CB um das doppelte Rechteck über denselben Theilen.

74.

Wir wissen aus dem Vorhergehenden, daß Quadrate und Rechtecke durch Zahlen ausgedrückt werden können, wenn man Zahlen, die ihre Seiten vorstellen, mit einander multiplicirt. Es kann also jede Zahl, in soferne sie nämlich stets als das Produkt zweier gleicher oder ungleicher Factoren angesehen werden kann, auch immer für den Ausdruck des Flächeninhaltes eines Quadrates oder eines Rechteckes gelten. So ist z. B. die Zahl 12 der Ausdruck eines Rechteckes, dessen Seiten durch 3 und 4 vorgestellt werden, da diese letzten Zahlen mit einander multiplicirt 12 geben. Was wir demnach

eben von Quadraten und Rechtecken über gewissen Linien sagten, gilt ebenso von Quadraten oder zweiten Potenzen gewisser Zahlen und ihren Produkten, d. h.

75.

Theilt man eine Zahl in zwei Theile, so ist das Quadrat oder die zweite Potenz der Zahl gleich der Summe der Quadrate der beiden Theile mehr dem doppelten Produkte beider Theile.

Sey z. B. die Zahl 10 in zwei Theile 7 und 3 getheilt, so haben wir

Das Quadrat von 10	100
Das Quadrat von . 7	49
» » » . 3	9
das doppelte Produkt 21 von 7 und 3	42
somit die Summe dieser Größen .	100

genau wie oben.

Theilt man ebenso die Zahl 12 in die Zahlen 8 und 4, oder 7 und 5, oder 9 und 3, so findet man stets die Summe der Quadrate je zweier solcher Theile und ihres doppelten Produktes gleich 144 oder dem Quadrate von 12.

Zehnter Abschnitt.

Aehnliche Figuren. — Aehnliche Dreiecke. — Verhältniß ihrer Seiten. — Wie man ähnliche Dreiecke ihrer Größe nach vergleicht. — Regelmäßige und unregelmäßige Figuren. — Figuren nach kleinerem und größerem Maaßstabe.

76.

Einer der wichtigsten Vortheile, den uns die Geometrie bringt, ist, daß sie uns in den Stand setzt, zwei Gegenstände mit einander zu vergleichen, die in jeder Rücksicht, ihre Größe ausgenommen, einander ähnlich gestaltet sind. Solche Gegenstände werden, um mit einem schon aus dem gemeinen Leben bekannten Ausdrucke zu sprechen, nach verschiedenen Maaßstäben gebildet seyn. So ist z. B. die Figur eines Landes auf der Landkarte der Gestalt des Landes selbst vollkommen ähnlich, und im Grunde nur eine Darstellung desselben in verjüngtem Maaßstabe. Dieser Ausdruck aber will offenbar nur sagen, daß jede Entfernung und überhaupt jede Ausdehnung des Landes in der Karte gleichmäßig verkleinert erscheint.

Betrachten wir nun ein Dreieck ABC Fig. 59, theilen wir seine Seite AB in zwei gleiche Theile Aa und Ba, und ziehen wir durch den Punkt a eine Linie ac parallel zu AC. Das so entstehende kleine Dreieck Bac hat offenbar gleiche Winkel mit dem großen

Dreiecke ABC; denn der Winkel bei B ist beiden Figuren gemeinschaftlich, und die Winkel bei a und A, so wie die bei c und C sind als Gegenwinkel (33) einander gleich. Wenn wir überdieß uns überzeugten, daß die Seiten des kleinen Dreieckes durchaus in gleichem Maaße kleiner sind, als die gleichliegenden Seiten des großen, so müßten wir von den beiden Figuren sagen, daß sie einander vollkommen ähnlich und lediglich in ihrem Maaßstabe verschieden sind. Die Seite Ba des kleinen Dreieckes ist vermöge unserer Zeichnung die Hälfte der Seite AB des großen, und durch unmittelbare Messung zeigt sich in der That, daß auch ac die Hälfte von AC und Bc die Hälfte von BC ist.

Hätten wir die Seite AB statt wie hier in zwei, in drei oder vier gleiche Theile getheilt, und durch den bei B zunächst liegenden Theilungspunkt eine Linie parallel zu AC gezogen, so würden wir ebenso finden, daß die Seiten des so entstehenden kleinen Dreieckes durchaus den dritten oder vierten Theil der gleichliegenden Seiten des großen betragen. Unter gleichliegenden Seiten aber versteht man die gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten.

Wenn also die Winkel zweier Dreiecke einander stückweise gleich sind, so sind die Dreiecke einander ähnlich, d. h. je zwei gleichliegende Seiten derselben haben zu einander stets dasselbe Verhältniß.

77.

Man würde aber sehr irren, wenn man daraus schließen wollte, daß der Flächeninhalt zweier ähnlicher Dreiecke in dem Verhältnisse ihrer Seiten steht, also z. B. den Raum, welchen das eine Dreieck einschließt, zweimal so groß, als den Raum, welchen das zweite Dreieck umfaßt, annehmen wollte, wenn die Seiten des ersten zweimal so groß, als die gleichliegenden des zweiten Dreieckes sind.

Verzeichnen wir, um dieß näher zu erörtern, ein Dreieck ABC Fig. 60, und verlängern wir dessen Seiten AB und BC, bis jede derselben noch einmal so lang wird, so erhalten wir ein dem ersten ähnliches Dreieck BDE mit durchaus zweimal längeren Seiten. Hier lehrt nun schon der Augenschein, daß der Flächenraum des Dreieckes BDE viel mehr als zweimal so groß, als der des Dreieckes ABC ist, da offenbar der zugewachsene Raum ACDE viel größer ist, als das ursprüngliche Dreieck ABC. Wir wollen aber den Unterschied der Flächenräume der beiden Dreiecke genauer untersuchen, und zu diesem Behufe die Seite DE in F halbiren, und die Linien AF und FC ziehen. Das Dreieck BDE zerfällt auf diese Art in vier congruente Dreiecke, deren jedes dem ursprünglichen Dreiecke ABC gleich ist, wovon man sich leicht durch einen geometrischen Beweis, am schnellsten aber durch Deckung überzeugen kann, indem man nämlich die Fig. 60 in Papier ausschneidet, und die Dreiecke über einander legt.

Daraus folgt aber, daß der Flächenraum des großen Dreieckes BDE, dessen Seiten zweimal so groß sind, als die gleichliegenden des ursprünglichen ABC, viermal so groß ist, als der Flächenraum dieses ursprünglichen Dreieckes.

Verlängert man ebenso die Seiten AB und BC noch über D und E hinaus Fig. 61, bis sie dreimal so lang werden, als AB und BC, theilt man die Basis GH des neuen Dreieckes BGH in drei gleiche Theile GI, IK und KH, und zieht man endlich die Linien DI, FI, FK und EK, so zerfällt das Dreieck BGH in neun Dreiecke, die durchaus congruent und deren jedes dem ursprünglichen Dreiecke ABC gleich ist; es hat also das neue Dreieck BGH, dessen Seiten durchgängig dreimal größer sind, als die gleichliegenden Seiten des ähnlichen Dreieckes ABC, einen neunmal größeren Flächeninhalt, als das Dreieck ABC.

Setzen wir dieß Verfahren fort, und verlängern wir die Seiten AB und BC des ursprünglichen Dreieckes, bis sie viermal länger werden, so erhalten wir eine neue Reihe von sieben gleichen Dreiecken, die, zu den eben gefundenen neun hinzugegeben, sechszehn Dreiecke ausmachen, die unter einander alle congruent und deren jedes dem Dreiecke ABC gleich.

Fassen wir nun das Vorhergehende zusammen, so sehen wir, daß, wenn die Seiten eines Dreieckes zweimal, dreimal, viermal größer sind, als die

gleichliegenden eines ähnlichen Dreieckes, der Flächeninhalt des ersten das vierfache, neunfache, sechszehnfache des Flächeninhaltes des zweiten Dreieckes beträgt.

Die Zahlen 4, 9, 16 .... aber sind die zweiten Potenzen oder Quadrate der Zahlen 2, 3, 4 ....

Es verhalten sich also die Flächenräume ähnlicher Dreiecke wie die Quadrate ihrer Seiten.

In der That haben wir ja auch oben (71) dasselbe von Quadraten nachgewiesen; auch bei diesen Figuren wird der Flächenraum viermal, neunmal, sechszehnmal ... größer, wenn eine Seite derselben zweimal, dreimal, viermal ... größer wird, also nehmen wirklich, und das sagt gerade unser eben aufgestellter Satz, die Flächenräume ähnlicher Dreiecke in demselben Maaße zu, in welchem die Flächenräume der über ihren Seiten construirten Quadrate wachsen.

Dasselbe gilt aber, wie wir gleich sehen werden, nicht bloß von Dreiecken und Quadraten, sondern überhaupt von allen durch gerade Linien gebildeten Figuren.

78.

Man nennt in der Geometrie eine Figur regelmäßig, wenn sie durchaus gleiche Seiten und gleiche Winkel hat. So ist z. B. ein Quadrat oder ein gleichseitiges Dreieck eine regelmäßige Figur.

79.

Es ist demnach die sechsseitige Figur ABCDEF Fig. 62 offenbar eine unregelmäßige. Bilden wir nun eine andere sechsseitige Figur, die der ersten vollkommen ähnlich, aber nach einem zur Hälfte kleinern Maaßstabe entworfen ist, d. h. gleiche Winkel mit der ersten, und durchaus halb so große Seiten wie die erste Figur hat. Zu diesem Behufe wollen wir die erste Figur in Dreiecke zerfällen, indem wir vom Punkte A nach den Ecken C, D, E Linien ziehen; theilen wir hierauf die Seite AB in zwei gleiche Theile Ab und Bb, und ziehen wir eine Linie bc parallel zu BC, dann von c eine Linie cd parallel zu CD, ebenso von d eine Linie de parallel zu DE, und endlich von e eine Linie ef parallel zu EF.

Die so entstandene zweite sechsseitige Figur Abcdef hat gewiß durchaus nur halb so große Seiten, als die erste sechsseitige Figur ABCDEF, denn wir haben in jedes der Dreiecke, die zusammen diese erste Figur bilden, ein anderes ähnliches Dreieck verzeichnet, dessen Seiten genau halb so groß sind (76), als die gleichliegenden des zugehörigen größeren Dreieckes. Es sind folglich auch die Linien bc, cd, de, ef durchaus die Hälften der Linien BC, CD, DE, EF.

Ueberdieß aber sind die Winkel der neuen Figur den Winkeln der ersten durchaus gleich; denn der

Winkel b ist dem Winkel bei B gleich, weil bc und BC parallel sind; der Winkel bei c wird von zwei Winkeln gebildet, die den beiden Winkeln, aus denen der Winkel bei C besteht, gleich sind; es ist also auch der Winkel bei c dem Winkel bei C gleich u. s. w.

Die neue sechsseitige Figur ist also der alten vollkommen ähnlich, nur in zweimal kleinerem Maaßstabe ausgeführt.

80.

Wie verhalten sich nun die Flächenräume dieser beiden ähnlichen sechsseitigen Figuren zu einander?

Das Dreieck ABC hat viermal größeren Flächeninhalt, als das Dreieck Abc (77); ebenso ist der Flächenraum des Dreieckes ACD viermal größer, als der des Dreieckes Acd, und dasselbe gilt von den übrigen Dreiecken. Es ist also auch der Flächeninhalt der sechsseitigen Figur ABCDEF viermal größer, als der der ähnlichen, in halbem Maaßstabe ausgeführten Figur Abcdef.

Da aber offenbar der Flächeninhalt der kleineren Figur ebenso neunmal, sechszehnmal u. s. w. kleiner ausgefallen wäre, wenn man sie auf einen dreimal, viermal u. s. w. kleineren Maaßstab ausgeführt hätte, als die größere, so sieht man, daß, was wir oben (77) von Dreiecken und Quadraten sagten, von allen Figuren, die durch gerade Linien gebildet werden, gilt, und man überhaupt folgenden Satz hat:

81.

Die Flächenräume ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten.

Dieser Satz ist von der größten Wichtigkeit, da er sehr häufige Anwendung findet, und zugleich ist aus dem hier befolgten Beweisgange dem Leser wieder ersichtlich geworden, wie angemessen es ist, sich mit den Eigenschaften des Dreieckes bekannt zu machen, bevor man an die Untersuchung anderer Figuren geht, da sich diese gleichsam von selbst ergibt, wenn man jene als bekannt voraussetzen darf; und dieß ist der Grund, warum in den Elementen Euclid's das Dreieck eine so große Rolle spielt.

82.

Da sich nun ähnliche Figuren überhaupt in Bezug auf ihre Seiten und Flächenräume ganz ebenso verhalten, wie Quadrate, so wird, was wir oben (72) von den Quadraten über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes sagten, von ähnlichen Figuren überhaupt gelten, die über den Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes verzeichnet werden, d. h. wenn man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes unter einander ähnliche Figuren construirt, so werden die Flächenräume der Figuren über den Katheten zusammeu immer gleich seyn dem Flächenraume der Figur über der Hypothenuse. Verzeichnet man also z. B. über die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes **gleichseitige**, also unter einander ähn-

liche Dreiecke, so haben die Dreiecke über den Katheten zusammen denselben Flächeninhalt mit dem Dreiecke über der Hypothenuse.

Eilfter Abschnitt.

Anwendungen der Eigenschaften ähnlicher Figuren. — Die Höhe eines Kirchthurmes aus der Ferne zu messen. — Die Höhe eines Berges, ohne ihn zu ersteigen. — Die Distanz des Mondes von der Erde zu bestimmen. — Eingetheilte Maaßstäbe. — Bestimmung kleiner Bruchtheile eines Zolles. — Eigenschaften von vier Proportionalen. — Methode, Proportionalen zu finden.

83.

Es gibt vielleicht im ganzen Gebiete der Mathematik keine nützlichere Lehre, als die eben hier abgehandelte von der Aehnlichkeit der Dreiecke, und wir können unseren Lesern nur einen schwachen Begriff ihrer hohen Wichtigkeit durch einige Beispiele geben, die wir hier aus ihren wahrhaft unzähligen Anwendungen anführen wollen.

Gesetzt, wir wollten die Höhe eines Thurmes AB (Fig. 63) kennen lernen, den man nicht unmittelbar messen kann oder will, wie denn dieß auch sehr schwierig und umständlich wäre. Zu diesem Zwecke errichte man in einiger Entfernung vom Thurme

einen senkrechten Stab DE, auf welchem ein Fernrohr, oder auch nur ein gespannter Faden, längs dessen man hinsehen kann, angebracht ist, richte dann dieß Fernrohr oder diesen Faden genau auf die Spitze des Thurmes, und denke sich die Linie EB, in welcher der Faden liegt, bis nach C verlängert, so entstehen zwei Dreiecke CDE und ABC, die einander ähnlich sind, da ED sowohl als AB senkrecht stehen, und folglich diese Seiten der beiden Dreiecke parallel laufen. Es hat demnach CD zu DE dasselbe Verhältniß, wie CA zu AB. Da man aber CD und DE leicht messen kann, so wird man auch leicht das Verhältniß der Linien CA und AB bestimmen. Gesetzt, wir hätten gefunden, DE betrage zwei Drittheile von CD, so muß auch AB zwei Drittheile von AC betragen. Ist also z. B. CA gleich 300 Fuß, so ist der Thurm 200 Fuß hoch.

Um also die Höhe des Thurmes AB zu finden, braucht man bloß CA zu messen.

84.

Im Allgemeinen ebenso wird man verfahren, wenn es sich um die Messung der Höhe eines Berges handelt, nur wird man hier die Methode in etwas abändern müssen, da der Fußpunkt einer Senkrechten vom Scheitel des Berges nicht zugänglich, und folglich die Distanz CA (Fig. 63) nicht unmittelbar meßbar ist.

Sey (Fig. 64) A der Gipfel des Berges, so wird man in zwei Orten C und D die gleich langen senkrechten Stäbe CF und DE aufstellen, und über auf ihren oberen Enden angebrachte Fäden nach dem Punkt A hin visiren. Denkt man sich dann die Linien der Fäden nach beiden Seiten verlängert, bis sie einerseits bei G und H in den Boden, und andererseits auf den Gipfel A des Berges reichen, so entsteht ein schiefwinkliges GAH dessen Höhe AM die gesuchte Höhe des Berges ist.

Um diese nun zu finden, messen wir die Linie GH, und verzeichnen (Fig. 65) eine Linie KL, die z. B. eben so viel Zolle enthält, als GH Klafter hat; in K bilden wir einen Winkel NKL, der gleich ist dem Winkel HGA, und ebenso in L einen Winkel NLK gleich dem Winkel AHG; endlich verlängern wir KL und fällen von N eine senkrechte Linie NO auf KO, so daß jetzt ein schiefwinkliges Dreieck NLK, dessen Höhe NO ist, entstanden seyn wird.

Wir wissen aber aus dem Vorhergehenden, daß wenn zwei Dreiecke zwei ihrer Winkel einander gleich haben, es auch die dritten Winkel seyn müssen (48). Die Dreiecke AGH und NKL haben somit gleiche Winkel, sind also einander ähnlich, und demnach wird GH sich zu AH stets ebenso verhalten, wie KL zu NL. Da wir abet der Linie KL so viele Zolle gaben, als GH Klafter enthält, so muß offenbar NL auch so viele Zolle enthalten, als AH

Klafter hat. Es sind aber ferner die Dreiecke AHM und NLO auch unter einander ähnlich, denn die Winkel AHM und NLO sind als Nebenwinkel der gleichen Winkel AHG und NLK, und die Winkel AMH und NOL als Rechte einander gleich. Es hat also auch NO so viele Zolle, als AM Klafter mißt. Um also die gesuchte Höhe AM des Berges zu finden, brauchen wir nur in unserer Zeichnung die Linie NO zu messen; so viele Zolle diese hat, so viele Klafter ist der Berg hoch.

85.

Nahe auf dieselbe Art bestimmen die Astronomen die Entfernung des Mondes, eine Aufgabe, von der wir die Hauptzüge ebenfalls, so weit es hier angeht, mittheilen wollen.

Es seyen A und B Fig. 66 zwei Orte auf der Oberfläche der Erde, und ihre Distanz AB z. B. in Meilen genau bekannt; M sey der Mond, den man also von A und B in den Richtungen AM und BM sieht. Wenn man nun in A ein Fernrohr auf B, ein anderes auf M richtet, so wird der Winkel, den die beiden Fernröhre mit einander bilden, dem Winkel MAB gleich seyn. Man wird also diesen Winkel dadurch leicht bestimmen können, so wie auf dieselbe Art den Winkel ABM.

Verzeichnen wir nun eine Gerade ab Fig 67, die eben so viele Zolle, als AB Meilen enthält, legen wir an ein Ende a derselben eine Linie am so an, daß

sie denselben Winkel mit ab bildet, welchen AM mit AB macht, hierauf an das andere Ende b eine Linie bm so, daß sie mit ab einen dem Winkel MBA gleichen Winkel macht, so haben wir ein Dreieck abm, welches zwei, also auch sämmtliche Winkel mit dem Dreiecke ABM gleich hat, und folglich diesem ähnlich ist. Demnach müssen (76) die gleichliegenden Seiten dieser beiden Dreiecke durchaus dasselbe Verhältniß zu einander haben; da wir aber Fig. 67 so verzeichneten, daß ab so viele Zolle hat, als AB in Fig. 66 Meilen enthielt, so muß auch z. B. AM so viele Meilen enthalten, als am Zolle hat. Man braucht also nur die Seite am in Fig. 67 zu messen, um sofort die Entfernung des Mondes von dem Orte A auf der Oberfläche der Erde zu erfahren.

So wird diese Aufgabe im Allgemeinen behandelt werden müssen; der Kürze wegen haben wir hier nun freilich mehrere Erleichterungen eingeführt, die in der Wirklichkeit nicht Statt finden; so nahmen wir z. B. die Linie AB gerade an, allein, da die Erde eine Kugel ist, so wird auch eine solche Verbindungslinie zweier Orte ihrer Oberfläche eigentlich krumm seyn müssen; ferner setzten wir voraus, daß man von einem Orte aus den andern sehen kann; allein auch dieß wird bei nur irgend bedeutender Entfernung der Orte von einander nicht Statt haben, und man dann erst durch weitere Kunstgriffe die Winkel bei A und B zu bestimmen suchen müssen;

indeß, wie gesagt, war uns hier nur darum zu thun, unseren Lesern einen allgemeinen Begriff von der Lösung dieses Problemes zu geben, und wir hoffen, daß sie nun wenigstens nicht mehr unter diejenigen gehören werden, die da meinen, die Astronomen führten nur sich selbst und Andere in die Irre, wenn sie von Entfernungen der Gestirne sprechen, die sie bestimmt haben.

86.

Nun wir aber einmal die Entfernung des Mondes kennen, wollen wir noch einen Schritt weiter thun, und die viel größere Entfernung der Sonne bestimmen.

Zur Zeit einer der beiden Phasen des Mondes, die man erstes und letztes Viertel nennt, stehen bekanntlich Sonne, Mond und Erde in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen rechter Winkel im Monde liegt. Es stelle uns nun Fig. 68 eine solche Stellung der drei Gestirne vor; S sey die Sonne, E die Erde, und M der Mond. Richtet man von E aus ein Fernrohr nach M und ein anderes nach S, so wird man nur den Winkel, welchen diese beiden Fernröhre mit einander bilden, messen dürfen, um sofort den Winkel MES unseres Dreieckes zu haben.

Die Entfernung des Mondes von der Erde, wie wir aus unserer früheren Betrachtung hätten ableiten können, beträgt beiläufig 50000 deutsche Meilen. Ziehen wir jetzt eine Linie em (Fig. 69), die z. B. 50 Linien lang ist, so daß eine Linie

tausend Meilen vorstellt, und setzen wir an dieselbe die Linie mS unter einem rechten, die Linie eS hingegen unter einem dem Winkel MES in Fig. 68 gleichen Winkel an, so haben wir ein dem Dreiecke MES ähnliches Dreieck meS, dessen Seite eS ebenso viele Linien enthalten muß, als ES Tausende von Meilen hat. Allein wollte man dieß wirklich so, wie wir hier sagten, ausführen, so würde man bald sehen, daß kein Papier hinreicht, um die Figur 69 darauf zu verzeichnen. Es ist nämlich die Sonne in der That nahe 20 Millionen Meilen von der Erde entfernt, die Seite eS in Fig. 69 müßte also 20000 Linien oder über 23 Klafter lang werden. Unser Maaßstab für die Figur 69 ist also viel zu groß, und wir müßten z. B. mit einer Linie eine Million Meilen vorstellen, die Linie em also nur dem zwanzigsten Theile einer Linie gleich machen, um dann eS in einer Länge von zwanzig Linien zu erhalten, die somit für die gesuchte Entfernung der Sonne von der Erde 20 Millionen Meilen geben würde.

87.

Die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke kann uns aber auch noch für einen andern Zweck dienen, den wir in unseren Betrachtungen schon öfters berührten, nämlich für die Eintheilung einer geraden Linie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile.

So lange diese Theile Zolle, Linien u. dgl. sind, wird man die Eintheilung mittelst eines Maaßstabes

bewerkstelligen. Wenn es sich aber darum handelt, eine Linie von beliebiger Länge in eine gewisse Anzahl gleicher Theile überhaupt zu theilen, ohne auf die Größe dieser Theile in Vergleich mit einem bestimmten Maaße Rücksicht zu nehmen, so werden andere Methoden hierzu erfordert werden.

Gesetzt, wir wollten die Linie AB in vier gleiche Theile theilen (Fig. 70). Ziehen wir zu diesem Behufe unter einem beliebigen Winkel mit AB eine Linie BH von beliebiger Länge, und tragen wir auf dieser Linie vier wieder beliebig lange aber unter einander gleiche Stücke BC, CD, DE, EF auf, verbinden wir A mit F und ziehen dann die Linien EI, DH, CG parallel zu AF, so entstehen vier ähnliche Dreiecke, deren Seiten also durchaus gleiches Verhältniß zu einander haben. Da aber BC der vierte Theil von BF ist, so muß auch BG der vierte Theil von AB seyn; ebenso muß, da BD die Hälfte von BF ist, auch BH die Hälfte von AB, also auch HG der vierte Theil von AB seyn; ebenso wird BI gleich drei Viertheilen von AB und folglich auch HI ein Viertheil von AB seyn. Mithin ist AB auf diese Art in vier gleiche Theile AI, IH, HG, und GB getheilt worden.

Ebenso wird man die Linie AB in zehn, zwanzig u. s. w. gleiche Theile theilen; nur muß man dann die Linie BH gehörig verlängern; wenn man also eine kurze Linie in viele Theile theilen will, so wird man der Linie BF eine außerordentliche Länge geben müssen.

88.

In solchen Fällen bedarf man nun einer andern Methode, die sich hier bequemer gestaltet. Gesetzt, wir wollten die Linie BC (Fig. 71) in zehn gleiche Theile theilen, so errichten wir darauf senkrecht eine beliebig lange Linie BA, und tragen auf derselben zehn beliebig lange gleiche Stücke B9, 98, 87 u. s. w. auf, verbinden den Endpunkt A des letzten dieser Stücke mit C, und ziehen dann in den Theilungspunkten 1, 2, 3, 4 ... parallele Linien zu BC; es entstehen auf diese Art eine Menge ähnlicher Dreiecke, deren Seiten also zu einander dasselbe Verhältniß haben; da aber z. B. in dem obersten kleinen Dreiecke die Seite A1 das Zehntheil der Seite AB im Dreieck ABC beträgt, so ist auch die Seite 11′ das Zehntheil der Seite BC; ebenso enthält A2 zwei Zehntheile der Seite AB, folglich auch 22′ zwei Zehntheile der Linie BC u. s. w. Man hat also auf diese Art bestimmt, wie lang ein, zwei, drei u. s. w. Zehntheile der Linie BC sind, und folglich die gewünschte Theilung vollbracht.

89.

Wir wollen nun, nachdem wir mit den vorhergehenden Beispielen unsern Lesern die Nützlichkeit der Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke wenigstens einigermaßen nachgewiesen haben, zur Fortsetzung unserer geometrischen Betrachtungen übergehen.

Man nennt vier Linien A, B, C, D Fig. 72 **vier Proportionirte**, wenn die ersten beiden sich zu einander ebenso verhalten, wie die letzten beiden, so daß, wenn z. B. A zwei Drittheile von B mißt, auch C zwei Drittheile von D enthält, und also stets dieselbe Zahl das Verhältniß je zweier derselben ausdrückt.

90.

Solche Linien haben unter anderen die merkwürdige Eigenschaft, daß **ein Rechteck über der ersten und letzten einem Rechteck über der zweiten und dritten gleich ist.**

Bilden wir z. B. aus unseren vier Proportionirten A, B, C, D in Fig. 72 hiernach Rechtecke Fig. 73, in deren einem A die Basis, D die Höhe, und in deren anderem B die Basis und C die Höhe gebe. Da nun die vier Linien proportionirt sind, so ist A genau im selben Maaße größer, als B, in welchem C größer ist als D. Was also das eine Rechteck an Breite voraus hat, ersetzt das andere genau an Höhe, und was das erste an Höhe weniger hat, verliert auch genau das zweite an Breite. Die Rechtecke sind folglich einander völlig gleich.

91.

Die Leser werden sich aus der Arithmetik erinnern, daß in einer Proportion z. B.

$$2 : 4 = 6 : 12$$

das Produkt der äußeren Glieder 2 und 12 stets dem Produkte der inneren 4 und 6 gleich, nämlich

immer 24 ist. Dieß ist aber im Grunde nur unser eben betrachtete geometrische Satz; die Zahlen 2, 4, 6, 12 können nämlich eben so gut Linien, als irgend andere Größen vorstellen, und da unter ihnen obige Proportion Statt findet, also die erste zur zweiten sich genau verhält, wie die dritte zur vierten, so sind die durch diese Zahlen vorgestellten Linien vier Proportionirte, folglich das Rechteck der ersten und letzten, oder, was dasselbe ist, ihr Produkt dem Rechtecke über der zweiten und dritten oder ihrem Produkte gleich. Dieß bildet den Grund der sogenannten Regel de Tri, bei welcher gewöhnlich die drei ersten Proportionirten gegeben sind, und die vierte dadurch gefunden wird, daß man die zweite mit der dritten multiplicirt, und dieß Produkt durch die erste dividirt. Dieß ist bei Zahlen nun von selbst klar, aber wie soll man bei Linien verfahren, wenn drei Proportionirte gegeben sind, und man die vierte zu suchen hat?

92.

Seyen (Fig. 74) A, B, C die drei gegebenen Linien, zu denen eine vierte Proportionirte zu finden ist. Man bilde mit A und B ein beliebiges Dreieck Fig. 75, und verzeichne hierauf ein anderes Dreieck Fig. 76 so, daß dessen Winkel den Winkeln des ersten Dreiecks gleich, und eine seiner Seiten von der Linie C gebildet werde, wobei C so zu stellen ist, daß der dieser Seite gegenüber liegende Winkel

dem der Seite A in Fig. 75 gegenüber liegenden Winkel gleich wird. Hier ist nun offenbar die Seite D in Fig. 76, welche demjenigen Winkel gegenüber liegt, der dem der Seite B in Fig. 75 gegenüber liegenden Winkel gleich ist, die gesuchte vierte Proportionirte. Denn die beiden Dreiecke Fig. 75 und Fig. 76 sind wegen der Gleichheit ihrer Winkel ähnlich, folglich ihre gleichliegenden Seiten in gleichem Verhältnisse, also verhält sich A zu B in Fig. 75 gerade so, wie C zu D in Fig. 76, und somit sind diese Linien vier Proportionirte.

Zwölfter Abschnitt.

Kreise. — Mittelpunkt. — Umfang. — Halbmesser. — Grade. — Quadranten. — Verschiedene Eintheilungen des Kreises. — Grade in Minuten und Sekunden getheilt. — Quadratur des Kreises. — Unmöglichkeit eines genauen numerischen Ausdruckes des Verhältnisses zwischen Durchmesser und Umfang. — Umfang der Erde. — Näherungsweise Bestimmung des Umfanges eines Kreises. — Wie findet man den Flächeninhalt eines Kreises, wenn sein Halbmesser gegeben ist?

93.

Bekanntlich nennt man einen **Kreis** diejenige krumme Linie, welche mittelst eines Zirkels beschrieben wird, indem man einen seiner Füße in einem und demselben Punkte fest hält, und den andern Fuß

um diesen herumdreht. Die Linie selbst heißt der Umfang oder die Peripherie des Kreises, und der Punkt, in welchem der eine Fuß des Zirkels fest stand, der Mittelpunkt des Kreises; die letzte Benennung ist sehr angemessen, da offenbar alle Punkte des Umfanges von diesem Mittelpunkte gleich weit abstehen. Dieser beständige Abstand der Peripherie vom Mittelpunkte, oder die Entfernung der beiden Fußspitzen des Zirkels heißt der Halbmesser oder Radius des Kreises, das letzte von einem lateinischen Worte, das Strahl bedeutet, weil mehrere vom Mittelpunkte aus gezogene Halbmesser eine strahlenförmige Anordnung zeigen.

Ist also Fig. 77 ein Kreis, so ist ADBE seine Peripherie, C sein Mittelpunkt, und jede der gleichen Linien CB, CD . . . ein Halbmesser desselben.

94.

Wir haben hier um den Mittelpunkt eine Menge gleicher Winkel, und die Theile der Peripherie, welche denselben entsprechen, sind offenbar auch gleich. Man wird daher diese Kreisbogen sehr gut zur Messung der Winkel am Mittelpunkte benützen können, indem diese Bogen genau in demselben Maaße zunehmen, in welchem die Winkel größer werden.

95.

In der That ist auch diese Methode, die Winkel durch die Bogen, welche sie von der Peripherie umfassen, zu messen, die gebräuchlichste, und, wie wir bald sehen werden, ungemein vortheilhaft.

Man theilt gewöhnlich die ganze Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile, und nennt einen solchen Theil einen Grad. Denkt man sich nun um den Mittelpunkt herum 360 Halbmesser zu jenen Theilungspunkten der Peripherie gezogen, so hat man 360 gleiche Winkel um den Mittelpunkt, und jeder dieser Winkel heißt ebenfalls ein Grad.

96.

Da nach 12 die sämmtlichen Winkel um einen Punkt herum vier Rechte ausmachen, so muß ein rechter Winkel dem vierten Theile von 360 Graden gleich kommen oder 90 Grade umfassen.

97.

Man nennt Durchmesser oder Diameter eine durch den Mittelpunkt des Kreises gehende und auf beiden Seiten bis zur Peripherie reichende Gerade. Es ist also ein Diameter die Summe zweier genau in entgegengesetzter Richtung vom Mittelpunkt ausgehender Halbmesser.

Wir haben in Fig. 78 zwei auf einander senkrechte Durchmesser eines Kreises verzeichnet. Da die Winkel am Centrum unter einander gleich sind, nämlich jeder derselben ein Rechter ist, so muß dadurch auch die Peripherie in vier gleiche Theile, deren jeder 90 Grade umfaßt, getheilt worden seyn. Einen solchen dem vierten Theile der Peripherie gleichkommenden Bogen nennt man einen Quadranten.

98.

Wir fanden oben (49), daß jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes $^2/_3$ eines Rechten gleich sey; ein solcher Winkel hat demnach 60 Grade.

99.

Da ein rechtwinkliges Dreieck mit gleichen Katheten die spitzen Winkel gleich haben (23) und beide spitze Winkel zusammen einen Rechten bilden müssen, so ist in einem solchen Dreiecke jeder spitze Winkel gleich einem halben Rechten, d. h. jeder hat 45 Grade.

100.

Die Eintheilung der Peripherie in 360 Grade ist eigentlich willkührlich; in der That ist z. B. in Frankreich eine andere Eintheilung, nämlich in 1000 Theile gebräuchlich. Man nennt diese beide Eintheilungen deßwegen, jene die Sexagesimal- und diese die Decimal-Theilung. Die letzte hat die großen Vortheile, welche bei unserem decadischen Zahlensysteme Produkte von 10 in der Rechnung bieten, die andere hingegen ein ungemein hohes Alter für sich (man schreibt ihre Einführung den Aegyptern zu) und den Vortheil der Theilbarkeit der Zahl 360 durch sehr viele Zahlen. Man kann nämlich die Zahl 360 durch alle folgenden Zahlen theilen, ohne daß ein Rest bleibt:

2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40 48, 60, 72, 90, 120, 180.

Daraus entsteht nun der für den Gebrauch sehr bequeme Umstand, daß eine große Anzahl Winkel in ganzen Zahlen ausgedrückt werden kann.

101.

Da ein Grad der neunzigste Theil eines Quadranten, ein Quadrant aber offenbar für Kreise von verschiedenen Halbmessern von ungleicher Länge ist, so wird auch ein Bogen von einem Grade sehr ungleiche Längen haben können.

Kreise sind stets unter einander ähnliche Figuren, die sich in jeder Beziehung gleichmäßig zu einander verhalten; wenn also Fig. 79 zwei Kreise so gestaltet sind, daß der Halbmesser des einen doppelt so groß als der des anderen ist, so wird auch die Peripherie des einen doppelt so lang, als die des anderen seyn, somit auch ein Quadrant oder ein Grad des einen doppelt so groß, als ein Quadrant oder ein Grad des anderen.

102.

Dieß gilt aber nur von den Bogen, und keineswegs von den Winkeln. Da rechte Winkel unter einander stets gleich sind, so müssen auch Winkel, die den neunzigsten Theil eines Rechten oder einen Grad umfassen, einander stets gleich seyn, wenn auch die Bogen, die sie in verschieden großen Kreisen umfassen, ungleich lang sind.

103.

Um die Größe auch solcher Winkel angeben zu können, die kleiner als ein Grad sind, theilt man den Grad in 60 gleiche Theile, die man Minuten, und die Minute wieder in 60 gleiche Theile, die man Sekunden nennt, ganz auf ähnliche Art, wie man die Stunden einzutheilen gewohnt ist.

Grade bezeichnet man durch das neben die Zahl oberhalb gesetzte Zeichen °, Minuten durch ′ und Sekunden durch ″. So kann man nun einen Winkel von z. B. 45 Graden, 53 Minuten, 17 Sekunden sehr kurz ausdrücken, indem man schreibt: 45° 53′ 17″.

104.

Da die Peripherie zum Durchmesser stets dasselbe Verhältniß hat (101), so darf man dieses nur in irgend einem Kreise bestimmen, um sofort in jedem Kreise aus der Größe des Durchmessers auf die Länge des Umfanges schließen zu können.

105.

Diese Aufgabe beschäftigte viele Jahrhunderte hindurch die ausgezeichnetsten Geometer, und von ihr hängt das berühmte Problem der Quadratur des Zirkels ab. Unter dieser letzten aber versteht man eine allgemeine Methode, aus der Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. des Durchmessers eines Kreises auf die Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. s. w. zu schließen, welche der vom Kreise eingeschlossene Raum enthält.

106.

Jenes Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser suchte man nun lange Zeit durch zwei Zahlen genau auszudrücken, aber immer umsonst; endlich überzeugte man sich, daß dieß unmöglich, und man jenes Verhältniß nur näherungsweise angeben könne, ein Fall, der in der Mathematik ungemein häufig vorkommt, wie man denn z. B. auch das Verhältniß der Seite eines Quadrates zu seiner Diagonale, so wie das der Seite eines gleichseitigen Dreieckes zu seiner Höhe nicht völlig genau ausdrücken kann.

107.

Wenn gleich aber dieß Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser sich nicht vollkommen genau durch zwei Zahlen angeben läßt, so kann man sich doch der Wahrheit so weit nähern, als man nur immer will, indem man immer andere und andere Zahlen wählt. So verhalten sich z. B. die Zahlen 1 und 3 beiläufig wie der Durchmesser eines Kreises zum Umfange desselben, so daß also der Umfang stets beiläufig dreimal so groß ist, als der Durchmesser; allein diese Zahlen drücken das gesuchte Verhältniß noch sehr ungenau aus, und man erhält dadurch in der That den Umfang um nahe anderthalb Zehntheile des Durchmessers zu klein, so daß, wenn z. B. der Durchmesser einen Fuß beträgt, der Umfang nicht, wie aus jenen Zahlen folgen würde, drei Füße, sondern nahe drei Füße und anderthalb

Zehntheile eines Fußes oder nahe drei Fuße einen Zoll und acht Linien lang ist.

108.

Viel näher geben dieß Verhältniß schon die Zahlen 7 und 22 an; man erhält dabei den Umfang nur mehr um beiläufig ein Tausendtheil des Durchmessers zu groß; wenn der Durchmesser also wieder einen Fuß lang wäre, so erhielte man mit Anwendung dieser Zahlen den Umfang um beiläufig ein Tausendtheil eines Fußes oder etwa um ein Fünftheil einer Linie zu groß. Noch genauer drücken jenes Verhältniß die Zahlen 106 und 333 aus; man erhält mit ihnen die Peripherie nur mehr um beiläufig acht Hunderttheile des Durchmessers zu klein, also in unserem Beispiele um etwa $^1/_{84}$ Linie zu kurz, und sofort mit den Zahlen 113 und 355, 33102 und 103993 rc., die das gesuchte Verhältniß immer wieder um etwas genauer angeben.

109.

Bleiben wir bei den Zahlen 7 und 22 stehen, die das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie schon, wie wir gesehen haben, nahe angeben, und suchen wir durch einige Beispiele ihren Gebrauch zu erläutern. Es sollen diese beiden Zahlen offenbar so viel bedeuten, als daß der Durchmesser stets nahe $^7/_{22}$ des Umfanges, oder umgekehrt der Umfang $^{22}/_7$ des Durchmessers betrage. Man wird also, um aus

dem Durchmesser den Umfang zu finden, die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. des Durchmessers erstens durch 7 dividiren, und zweitens den so erhaltenen Quotienten mit 22 multipliciren; die so resultirende Zahl wird die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. angeben, welche der Umfang hat. Umgekehrt aber, wenn man aus der Peripherie den Durchmesser finden will, wird man die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. der Peripherie mit 7 multipliciren, und durch 22 dividiren; die so erhaltene Zahl wird die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. geben, welche der Durchmesser enthält *).

Der Umfang unserer Erde beträgt 5399 d. Meilen; diese Zahl mit 7 multiplicirt gibt 37793, und diese Zahl durch 22 dividirt gibt nahe 1718; folglich hat der Durchmesser der Erde nahe 1718 deutsche Meilen.

Der Durchmesser des Mondes beträgt 466 d. Meilen; diese Zahl durch 7 dividirt gibt nahe 67, und diese Zahl mit 22 multiplicirt gibt 1474; folglich hat des Mondes Umfang 1474 deutsche Meilen.

---

*) Wer mit Decimalen rechnen kann, wird viel schneller zum Ziele gelangen, wenn er mit dem Quotienten 3.14159 des Verhältnisses des Durchmessers zur Peripherie entweder jenen multiplicirt, wenn er diese, oder diese dividirt, wenn er jenen sucht.

110.

Nachdem wir so gelernt haben, die Peripherie des Kreises aus dem Halbmesser und umgekehrt zu bestimmen, wollen wir nun den Flächeninhalt mittelst des Halbmessers oder des Umfanges zu bestimmen suchen.

Ziehen wir zu diesem Behufe aus dem Mittelpunkte C des Kreises Fig. 80 eine Menge Halbmesser in sehr kleinen Abständen von einander. Die von denselben in der Peripherie abgeschnittenen Bogen werden so klein seyn, daß jeder einzelne derselben keine irgend merkliche Krümmung zeigen, und folglich als gerade Linie wird betrachtet werden können. Dann besteht aber der ganze Kreis aus einer Menge kleiner Dreiecke, die mit ihren Scheiteln um den Mittelpunkt C herum liegen. Zur Höhe hat jedes dieser Dreiecke den Halbmesser des Kreises, und zur Basis einen jener kleinen Bogen der Peripherie. Die Fläche jedes solchen Dreieckes wird also durch das Produkt des Halbmessers des Kreises in den halben zugehörigen Bogen ausgedrückt werden, folglich alle Dreiecke zusammen oder der gesuchte Flächeninhalt des Kreises dem Produkte des Halbmessers in die halbe Peripherie gleich seyn.

Es ist demnach der von einem Kreise eingeschlossene Raum gleich einem Rechtecke über der halben Peripherie als Basis, und dem Halbmesser als Höhe.

Dieß wird noch ersichtlicher, wenn man sich zwei gleiche Kreise genau in derselben Art wie Fig. 80 durch viele gezogene Halbmesser in kleine Dreiecke zerfällt denkt, und dieselben, statt wie in Fig. 80 um den Mittelpunkt, so anordnet, wie Fig. 81 und 82 es zeigen, wo dann jeder Kreis gleichsam eine Säge zu bilden scheint, deren Zähne genau in die Zwischenräume des anderen passen; nähert man nun diese beiden Figuren einander bis die Spitzen der einen auf den Grund der anderen zu stehen kommen, so entsteht offenbar ein Parallelogram, und zwar, da die Bogen, in welche man den Umfang der Kreise theilte, sehr klein, und folglich die Winkel an den Basen der kleinen Dreiecke durchaus sehr nahe rechte Winkel, ein rechtwinkliges Parallelogram, dessen Höhe der Halbmesser, und dessen Basis die Peripherie eines der beiden gleichen Kreise ist. Zwei gleiche Kreise zusammen machen also ein Rechteck über der Peripherie und dem Halbmesser eines Kreises, und folglich ein Kreis ein Rechteck über der halben Peripherie und dem Halbmesser, da dieß letzte Rechteck die Hälfte des ersten beträgt.

111.

Um demnach die Fläche eines Kreises zu bestimmen, wird man zuerst aus seinem Halbmesser oder eigentlich aus seinem Durchmesser, d. h. dem doppelten Halbmesser nach (109) den Umfang bestimmen, davon die Hälfte nehmen, und mit dem Halbmesser multipliciren; das Produkt ist der gesuchte Flächeninhalt.

Kürzer ist das Verfahren, wenn man den Durchmesser mit sich selbst multiplicirt, dieß Produkt durch 14 theilt, und den so erhaltenen Quotienten 11mal nimmt; das Resultat ist der gesuchte Flächeninhalt. Der Grund hiervon ist jedem mit Betrachtungen dieser Art nur etwas Vertrauten leicht auffindbar; wir wollen uns von der Richtigkeit dieser Regel durch ein Beispiel überzeugen.

Wir hatten oben den Umfang der Erde gleich 5399 d. M., und den Durchmesser derselben gleich 1718 d. M. Berechnen wir nun zuerst nach der ersten, und dann nach der zweiten Regel den Flächeninhalt dieses Kreises, d. h. die Größe der Fläche, die da entsteht, wenn man sich unsere Erde durch ihren Mittelpunkt in zwei Hälften zerschnitten denkt.

Der halbe Umfang beträgt beiläufig 2700 d. M., der Halbmesser 859 d. M., also das Produkt dieser Größen beiläufig 2319000.

Nach der zweiten Regel soll man zuerst den Durchmesser, also hier die Zahl 1718, mit sich selbst multipliciren, wo man denn 2951524 erhält, diese Zahl durch 14 theilen, wo nahe der Quotient 210823 erscheint, und diesen Quotienten mit 11 multipliciren, wodurch man als Endresultat wieder beiläufig, wie früher, 2319000 findet.

Folglich führen beide Regeln auf dasselbe Resultat, nämlich daß jene Fläche 2319000 Quadratmeilen hat.

Die Zahlen stimmen nach beiden Methoden gefunden nicht vollkommen überein, weil sowohl oben, als auch hier, die Rechnung nur auf runde Zahlen geführt, und z. B. bei den Divisionen auf die Reste keine Rücksicht genommen wurde.

Die zweite Methode sieht hier länger aus, als die erste, weil man bei dieser die sonst nöthige vorläufige Bestimmnng des Umfanges aus dem Durchmesser oder umgekehrt, schon aus 109 voraussetzen konnte.

112.

Da Kreise stets unter einander ähnliche Figuren sind, so müssen sich ihre Flächeninhalte verhalten, wie die Quadrate oder zweiten Potenzen ihrer Halbmesser oder ihrer Peripherie, wie dieß denn auch aus unserer so eben gegebenen Regel für die Bestimmung des Flächeninhaltes eines Kreises folgt, wo die zweite Potenz des Halbmessers stets mit denselben Zahlen multiplicirt und dividirt wird, und also offenbar die Fläche des Kreises so zu- oder abnimmt, wie das Quadrat des Halbmessers wächst oder kleiner wird.

Dreizehnter Abschnitt.

Eigenschaften von Kreis-Segmenten. — Die Winkel im selben Segmente sind gleich. — Peripheriewinkel im Halbkreise sind Rechte. — Dem Kreise einbeschriebene Vierecke. — Winkel in verschiedenen Segmenten. —

Wir haben (Fig. 83) eine Figur verzeichnet, die man das Segment oder den Abschnitt eines Kreises nennt, und die, wie man sieht, im Grunde ein unvollendeter Kreis ist, dessen Endpunkte A und B durch eine Gerade verbunden sind, die man Sehne nennt. Auf dieser Sehne stellten wir mehrere Winkel so auf, daß ihre Scheitel in der Peripherie des Kreis-Abschnittes liegen, und ihre Schenkel durch die Endpunkte A und B der Sehne gehen. Vergleicht man nun diese Winkel mit einander, indem man etwa von einem derselben ein Muster in Papier ausschneidet, und dieses auf die anderen legt, so findet man, daß sie unter einander gleich sind. Es findet dieß aber bei jedem Segmente statt, mag es groß oder klein seyn; wir haben z. B. Fig. 84 ein anderes, bei weitem kleineres, als jenes Fig. 83 verzeichnet, und finden auch hier die Winkel an der Peripherie des Bogens alle unter einander gleich, aber viel größer, als in Fig. 83; in der That waren dort die Winkel durchaus spitz, während sie hier durchaus stumpf sind; jenes Segment aber war größer, und dieses ist kleiner, als ein Halbkreis.

Was würde denn nun der Fall seyn, wenn das Segment ein Halbkreis selbst wäre? Verzeichnen wir uns Fig. 85 einen Halbkreis, dessen Sehne AB also durch den Mittelpunkt des Kreises geht, und folglich ein Durchmesser desselben ist, und führen wir auch hier wieder mehrere Winkel an der Peripherie so auf, daß deren Schenkel sämmtlich durch die Endpunkte A und B der Sehne, d. h. hier des Durchmessers, gehen. Schon die bloße Ansicht der Figur zeigt uns, daß diese Winkel durchaus rechte sind, und bei näherer Untersuchung dieser Winkel überzeugt man sich hiervon denn auch vollends.

Es bieten sich uns also drei sehr merkwürdige Sätze dar. Erstens: Alle Winkel an der Peripherie eines und desselben Segmentes und über der Sehne desselben sind einander gleich; zweitens: Wenn das Segment ein Halbkreis ist, so sind diese Winkel durchaus rechte; drittens: Diese Winkel sind stumpf oder spitz, je nachdem das Segment kleiner oder größer als ein Halbkreis ist.

Wir wollen nun die Sätze nach der Reihe geometrisch zu beweisen suchen.

113.

Betrachten wir zuerst einen Halbkreis Fig. 86 und errichten wir Kürze halber bloß Einen Winkel über der Sehne, die hier der Durchmesser ist. Ziehen wir vom Mittelpunkte des Kreises C eine Linie CD nach dem Scheitel jenes Winkels, so entstehen zwei

Dreiecke ACD und BCD, in welchen die Seiten AC, CD und BC, als Halbmesser desselben Kreises (93) unter einander gleich sind. Wir wissen aber aus dem Vorhergehenden, daß, wenn in einem Dreiecke zwei Seiten einander gleich, auch die gegenüber liegenden Winkel gleich seyn müssen (23); es ist also im Dreiecke ACD der Winkel A dem Winkel ADC, und im Dreiecke BCD der Winkel B dem Winkel CDB gleich. Der Winkel in D besteht daher aus zwei Theilen, deren einer dem Winkel A, deren anderer dem Winkel B gleich kommt. Unser Peripheriewinkel D über dem Durchmesser ist also der Summe der Winkel A und B gleich, beträgt demnach die Hälfte der sämmtlichen Winkel des Dreieckes ABD, d. h. die Hälfte von zwei Rechten oder einen Rechten (38), was zu zeigen war.

Dieß gilt natürlich von jedem auf diese Art in einem Halbkreise gezogenen Winkel. Daraus folgt aber auch umgekehrt, daß wenn man (Fig. 87) auf einer und derselben Linie AB eine Reihe von rechten Winkeln errichtet, die Scheitel dieser Winkel alle in der Peripherie eines Halbkreises liegen müssen, dessen Durchmesser die Linie AB ist. Um sich hiervon zu überzeugen, wird man die Linie AB halbiren, und wenn C der Halbirungspunkt ist, in diesen Punkt C den Fuß eines Zirkels einsetzen, wo man denn finden wird, daß der andere Fuß genau durch alle Scheitel der rechten Winkel geht, wenn man ihn so gestellt, daß er durch A oder B ging.

114.

Um den zweiten der im Eingange dieses Abschnittes aufgestellten Sätze zu beweisen, müssen wir noch früher andere Eigenschaften der Winkel in einem Kreise kennen lernen, die übrigens nicht weniger interessant, als die eben behandelten sind.

Man nennt eine Figur einem Kreise einbeschrieben, wenn sämmtliche Scheitel ihrer Winkel in der Peripherie des Kreises liegen.

115.

Wir haben hier (Fig. 88) einem Kreise eine vierseitige Figur einbeschrieben, und aus dem Mittelpunkte des Kreises vier Halbmesser zu den vier Winkeln der Figur gezogen, welche, wie man sieht, diese Figur in vier Dreiecke zerfällen. Da jedes dieser Dreiecke je zwei Seiten als Halbmesser desselben Kreises einander gleich hat, so sind auch in jedem dieser Dreiecke zwei Winkel einander gleich. Die vier Winkel der einbeschriebenen Figur sind also dadurch in acht Winkel getheilt worden, und diese acht Winkel bestehen aus vier Paaren gleicher Winkel. Wir haben jedes Paar solcher gleicher Winkel mit demselben Buchstaben, ein Paar mit A, das andere mit B u. s. w. bezeichnet.

Die vier Winkel einer vierseitigen Figur machen aber nach (44) vier Rechte aus; es machen also unsere acht, mit Buchstaben bezeichneten Winkel zusammen vier Rechte; allein diese acht Winkel

enthalten die Winkel A, B, C, D zweimal; die einfachen Winkel A, B, C, D sind also zusammen der Hälfte von vier Rechten oder zwei Rechten gleich.

Betrachtet man nun die Anordnung dieser Winkel A, B, C, D näher, so sieht man, daß sie zusammen stets zwei gegenüber liegende Winkel der vierseitigen Figur bilden, indem ein Paar dieser einander gegenüber liegenden Winkel die Winkel A, B und C, D, und das andere Paar die Winkel A, D und B, C enthält. Je zwei einander gegenüber liegende Winkel einer einem Kreise einbeschriebenen vierseitigen Figur machen also zwei Rechte aus, ein äußerst wichtiger und nützlicher Satz, auf den wir später zurückkommen werden.

116.

Wenn zwei Winkel zusammen zwei Rechte oder 180° bilden, so heißt der eine das Supplement des andern; bilden zwei Winkel zusammen einen Rechten oder 90°, so heißt der eine das Complement des andern. Man kann also obigen Satz auch so ausdrücken: In jeder einem Kreise einbeschriebenen vierseitigen Figur ist ein Winkel das Supplement des ihm gegenüber liegenden Winkels.

117.

Es wird nun leicht seyn, den zweiten der im Eingange dieses Abschnittes aufgestellten Sätze zu beweisen.

Theilen wir einen Kreis (Fig. 89) durch eine Sehne AB in zwei Segmente, und errichten wir in dem einen Segmente über der Sehne AB den Winkel D, in dem anderen hingegen die Winkel C, E, F, G, so müssen diese Winkel C, E, F, G offenbar alle unter einander gleich seyn, da nach 116 jeder von ihnen das Supplement von D seyn muß; mit anderen Worten, jeder der Winkel C, E, F, G muß gerade so viel betragen, als dem Winkel D zu 180° fehlt.

Alle über derselben Sehne eines Kreissegmentes errichteten Winkel sind also einander gleich.

118.

Ziehen wir nun, um auch den dritten der obigen Sätze zu beweisen, in einem Kreise (Fig. 90) eine Sehne AB, auf deren einer Seite ein Segment liegt, das größer als ein Halbkreis ist, und errichten wir auf dieser Sehne einen Peripheriewinkel ACB. Zieht man ferner durch den Mittelpunkt des Kreises einen Durchmesser DE parallel zu AB, und errichtet man auf diesen den Peripheriewinkel DCE, der also nothwendig ein Rechter seyn wird, so lehrt schon der Augenschein der Figur, daß in diesem und überhaupt in jedem Segmente, welches größer als ein Halbkreis ist, der Peripheriewinkel auf der Sehne ein spitzer sey.

119.

Verzeichnet man endlich ein Segment (Fig. 91), welches kleiner als ein Halbkreis ist, und in dasselbe

den Peripheriewinkel ACB, ergänzt man den halben Kreis, zieht zu AB parallel einen Durchmesser DE, und errichtet auf diesen den Peripheriewinkel DCE, der also ein Rechter seyn wird, so lehrt wieder schon der Augenschein, daß in diesem, und überhanpt in jedem Segmente, welches kleiner als ein Halbkreis ist, der Peripheriewinkel über der Sehne ein stumpfer sey.

Aus dem Vorhergehenden folgt nun auch allgemein, daß wenn man über derselben geraden Linie mehrere einander gleiche Winkel errichtet, die Scheitel derselben sämmtlich in der Peripherie eines Kreissegmentes liegen, dessen Sehne jene gerade Linie bildet. Man kann sich hiervon leicht überzeugen, wenn man einen Winkel etwa in Papier ausschneidet, und über einer geraden Linie so bewegt, daß dessen Schenkel stets durch die Endpunkte jener Geraden gehen.

Bringt man in dem Scheitel dieses Winkels ein Reißblei an, so macht dieses bei jener Bewegung einen Halbkreis, wenn der Winkel ein Rechter, ein Segment, das größer als ein Halbkreis, wenn der Winkel ein spitzer, und endlich ein Segment, das kleiner als ein Halbkreis, wenn jener Winkel ein stumpfer ist.

Bayerische Staatsbibliothek München

Vierzehnter Abschnitt.

Parallele Sehnen. — Eine Tangente zu ziehen. — Einander schneidende Sehnen. — Einbeschriebene und umschriebene Figuren. — Einbeschriebene Polygone.

120.

Wir haben Fig. 92 in einem Kreise eine Anzahl zu einander paralleler Sehnen, und einen Durchmesser **AB** senkrecht auf diese Sehnen gezogen. Vergleicht man nun etwa mit einem Zirkel die Theile einer und derselben Sehne auf beiden Seiten des Durchmessers, so findet man diese Theile durchaus gleich, d. h. die Sehnen werden von dem Durchmesser durchaus halbirt. Hiervon kann man sich aber auch geometrisch leicht auf folgende Weise überzeugen:

121.

Ziehen wir vom Mittelpunkte **C** des Kreises zu den Endpunkten **D, E** einer jener parallelen Sehnen die Geraden **DC** und **CE**, so entsteht, da **CD** und **CE** Halbmesser, also einander gleich sind, ein gleichschenkliges Dreieck **DCE**, in welchem **CF** auf die Basis senkrecht gefällt ist. In diesem Falle aber wird nach (24) die Basis vom Lothe halbirt. Also theilt der Durchmesser **AB** die Sehne **DE** in zwei gleiche Theile, und dasselbe läßt sich von jeder anderen der **DE** parallelen Sehne nachweisen.

Bayerische Staatsbibliothek München

Parallele Sehnen werden also von einem auf dieselben senkrechten Durchmesser durchaus halbirt.

122.

Wir haben nun schon oft Halbmesser aus dem Mittelpunkte eines Kreises ziehen müssen. Wie findet man aber diesen Mittelpunkt, wenn er zufällig nicht bekannt seyn sollte?

Der eben (121) aufgestellte Satz gibt uns ein Mittel hierzu. Man wird nämlich in dem Kreise, dessen Mittelpunkt man sucht, eine Sehne ziehen, diese Sehne halbiren, auf den Halbirungspunkt derselben eine Senkrechte errichten, und diese verlängern, bis sie dem Umfange des Kreises auf beiden Seiten begegnet. Nach (121) muß diese Linie ein Durchmesser des Kreises seyn. Halbirt man nun diesen Durchmesser, so ist der Halbirungspunkt der gesuchte Mittelpunkt des Kreises.

123.

Ebenso wird man zum Ziele gelangen, wenn man eine zweite Sehne zieht, und wieder auf ihren Halbirungspunkt eine Senkrechte errichtet, die also ebenfalls ein Durchmesser des Kreises seyn wird. Da nun der Mittelpunkt des Kreises sowohl im ersten als zweiten Durchmesser liegen muß, so kann nur ein beiden Durchmessern gemeinschaftlicher Punkt, d. h. es muß der Durchschnittspunkt beider Durchmesser der gesuchte Mittelpunkt des Kreises seyn.

124.

Errichten wir in dem Endpunkte A (Fig. 93) eines Halbmessers CA eine auf CA senkrechte Linie DE, so liegt offenbar diese ganze Linie außerhalb des Kreises, und berührt denselben nur im Punkte A. Dieß können wir aber auch geometrisch so nachweisen:

Gehen wir zu diesem Behufe auf die Fig. 25 zurück, und nehmen wir an, AB stehe dort senkrecht auf AC, so sind die dort gebildeten Dreiecke lauter rechtwinklige, deren Hypothenusen BC, als dem rechten Winkel gegenüber liegend, durchaus größer sind, als die Kathete AB, welche dem spitzen Winkel C gegenüber liegt. Die kürzeste von einem Punkte B zu einer Geraden AC ziehbare Linie ist also die auf diese Gerade AC senkrechte AB.

Wenden wir dieß nun auf Fig. 93 an, so folgt daraus, daß zwischen dem Mittelpunkte C und der Geraden DE die kürzeste Linie der auf DE senkrechte Halbmesser CA ist. Alle übrigen von C zur Linie DE gezogenen Linien sind also länger, als CA, d. h. als der Halbmesser des Kreises, oder alle Punkte der Linie DE außer dem Punkte A, welcher in der Peripherie des Kreises liegt, befinden sich weiter vom Mittelpunkte des Kreises, als dessen Umfang, d. h. sie liegen außerhalb des Kreises.

125.

Zieht man hingegen eine Linie HG, die nicht senkrecht auf dem Halbmesser des Kreises steht, so

lehrt schon der Augenschein, daß dann eine Menge Punkte der Geraden HG innerhalb des Kreises liegen, oder näher am Mittelpunkt stehen, als der Punkt A.

126.

Eine solche Linie, wie DE, nennt man eine Tangente, und den Punkt A den Berührungspunkt.

127.

Um also eine Tangente zu einem Kreise zu ziehen, hat man bloß durch den Endpunkt eines Halbmessers eine Linie senkrecht auf diesen Halbmesser zu errichten.

128.

Wir haben Fig. 94 in einem Kreise zwei einander durchschneidende Sehnen AB und CD verzeichnet, und die Endpunkte derselben so verbunden, daß zwei Dreiecke DEB und AEC daraus entstanden. Die Winkel bei E sind als Scheitelwinkel einander gleich. Aus (117) aber wissen wir, daß Peripheriewinkel über demselben Segmente gleich sind; da nun die Winkel B und C über demselben Segmente, dessen Endpunkte A und D sind, stehen, so sind auch diese Winkel, und ebenso die Winkel A und D einander gleich, weil sie gleichfalls Pheripheriewinkel über demselben Segment, dessen Endpunkte B und C sind, vorstellen. Die beiden Dreiecke haben also ihre Winkel stückweise gleich, und sind demnach (76) ähnliche Dreiecke.

Es verhält sich daher BE zu AE, wie CE zu DE, oder bei sich schneidenden Sehnen sind die Stücke der Sehnen unter einander proportional.

129.

Daraus folgt aber ferner, daß das Rechteck über den Linien AE und BE dem Rechtecke über den Linien CE und DE gleich sey, denn die Basis des ersten Rechtecks verhält sich zur Basis des zweiten, wie die Höhe des zweiten sich verhält zur Höhe des ersten; unter diesen Umständen aber sind zwei Rechtecke nach (90) einander gleich.

Wenn also zwei Sehnen eines Kreises sich schneiden, so ist das Rechteck über den Stücken der einen dem Rechtecke über den Stücken der anderen Sehne gleich.

130.

Man sagt von einer Figur, daß sie einem Kreise umschrieben sey, wenn alle Seiten derselben Tangenten zum Kreise sind.

Erinnert man sich der in (114) gegebenen Erklärung einer einbeschriebenen Figur, so sieht man von selbst, daß man einem Kreise eine regelmäßige Figur von einer gewissen Anzahl gleicher Seiten einschreiben kann, wenn man den Umfang des Kreises in eben so viele gleiche Theile theilt. So wird man, um einem Kreise ein regelmäßiges, d. h. gleichsei iges Dreieck einzuschreiben, den Um-

fang des Kreises in drei gleiche Theile theilen, und die Theilungspunkte durch gerade Linien verbinden; ebenso wird man, um einem Kreise ein Quadrat, d. h. ein regelmäßiges Viereck einzuschreiben, den Kreis in vier gleiche Theile theilen, und die Theilungspunkte durch Gerade verbinden u. s. f. für andere regelmäßige Figuren.

Um aber den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile zu theilen, wird man z. B. den Raum um den Mittelpunkt in eben so viele gleiche Winkel theilen; die Halbmesser, welche die Schenkel der Winkel bilden, werden am Umfange des Kreises die gesuchten Theilungspunkte geben. Jene Theilung des Raumes um den Mittelpunkt wird man mit einem Winkel messenden Instrumente, z. B. mit dem gewöhnlichen Transporteur vornehmen.

Um aber auch unabhängig von einem solchen Instrumente, und bloß mit Hülfe eines Lineales und eines Zirkels einem Kreise eine regelmäßige Figur einzuschreiben, wird man auf eine Art verfahren, die wir nun in einigen Beispielen erläutern wollen.

131.

Will man einem Kreise ein Quadrat einschreiben, so wird man in dem Kreise zwei auf einander senkrechte Durchmesser ziehen, wie dieß in Fig. 95 geschehen ist. Die Geraden, welche die Endpunkte dieser Durchmesser verbinden, bilden offenbar ein Quadrat, denn erstens sind die Seiten der hier

verzeichneten Figur unter einander gleich, weil sie Sehnen gleicher Bogen sind, und zweitens sind die Winkel dieser Figur durchaus Rechte, weil sie durchaus Peripheriewinkel über einen Halbkreis bilden (113).

132.

Da jede Figur eben so viele Seiten als Winkel hat, so nennt man eine Figur von fünf Seiten ein Fünfeck, eine Figur von sechs Seiten ein Sechseck u. s. w. Alle Figuren aber, die mehr als vier Seiten haben, faßt man unter der Benennung Vieleck oder Polygon (von zwei griechischen Worten, die viel und Winkel heißen) zusammen.

133.

Um nun z. B. ein regelmäßiges Achteck einem Kreise einzuschreiben, wird man nur die Seiten eines dem Kreise nach (131) einbeschriebenen Quadrates Fig. 96 halbiren, und Halbmesser durch die Halbirungspunkte führen dürfen. Verbindet man dann die Endpunkte dieser Halbmesser mit den Ecken des Quadrates durch gerade Linien, so entsteht offenbar ein dem Kreise einbeschriebenes regelmäßiges Achteck.

134.

Ebenso wird man, um ein regelmäßiges Sechszehneck dem Kreise einzuschreiben, nur zuerst ein regelmäßiges Achteck einschreiben, die Seiten dieses Achteckes halbiren, und Halbmesser durch die Hal=

birungspunkte ziehen. Der Umfang des Kreises wird auf diese Art in sechszehn gleiche Theile getheilt, und die Theilungspunkte mit einander durch Gerade verbunden, geben das gesuchte dem Kreise einbeschriebene regelmäßige Sechszeheck.

Eben so wird man ein Zweiunddreißigeck oder Vierundsechszigeck, und überhaupt jede regelmäßige Figur dem Kreise einschreiben, deren Seiten doppelt so viele sind, als die der vorhergehenden Figur.

135.

Um ein gleichseitiges Dreieck einem Kreise einzuschreiben, wird man einen Durchmesser ziehen, und (Fig. 97) den Halbmesser CA in F halbiren, dann durch F eine Gerade BD senkrecht auf AC führen. Die Punkte B, E, D theilen den Kreis in drei gleiche Theile. Ziehen wir, um uns hiervon zu überzeugen, die Linien CD und AD. Da F der Halbirungspunkt von AC ist, so sind CF und FA einander gleich, somit werden in den Dreiecken CFD und AFD die rechten Winkel von einander gleichen Seiten eingeschlossen, und es müssen folglich (17) auch die Seiten CD und DA einander gleich seyn. Das Dreieck CDA ist also ein gleichseitiges, da alle Seiten desselben dem Halbmesser des Kreises gleich kommen; der Winkel ACD hat (98) demnach 60°; aus demselben Grunde muß auch der Winkel ACB 60° betragen, somit beide zusammen, oder der Winkel DCB 120° haben. Da ferner die Winkel

ECD und DCA zusammen 180° bilden müssen, so hat der Winkel DCE ebenfalls 120°, und endlich muß, da die drei Winkel BCD, DCE und ECB zusammen 360° machen, auch der Winkel ECD 120° haben.

Die Bogen BD, DE und EB, in welche man auf diese Weise den Umfang des Kreises theilt, sind also unter einander gleich, und es bilden die Verbindungslinien zwischen den Theilungspunkten in der That ein dem Kreise eingeschriebenes gleichseitiges Dreieck BDE.

136.

Nachdem wir aber so dem Kreise ein regelmäßiges Dreieck einschreiben gelernt haben, wird es nach dem obigen (134) ein leichtes seyn, ein regelmäßiges Sechseck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck u. s. w. einzuschreiben. So hat man z. B. in Fig. 98 dem Kreise ein regelmäßiges Sechseck eingeschrieben, indem man zuerst ein gleichseitiges Dreieck einschrieb, dann die Seiten dieses Dreieckes halbirte, durch die Halbirungspunkte Halbmesser zog, und die so am Umfange des Kreises bemerkten Theilungspunkte durch Gerade verband.

137.

Kann man einmal eine regelmäßige Figur von einer gewissen Anzahl Seiten dem Kreise einschreiben, so ist nichts leichter, als eine regelmäßige Figur von derselben Anzahl Seiten dem Kreise zu um=

schreiben (130). Man wird nämlich nur durch die Scheitel der Winkel der einbeschriebenen Figur Tangenten zum Kreise zu ziehen brauchen. So haben wir in Fig. 99 ein gleichseitiges Dreieck dem Kreise umschrieben, und dasselbe in Fig. 100 mit einem Quadrate gethan. Auf dieselbe Art wird jede regelmäßige Figur dem Kreise umschrieben, indem man vorher eine regelmäßige von derselben Anzahl Seiten dem Kreise einschreibt.

Außer dem Kreise gibt es unendlich viele verschiedene krumme Linien; die Untersuchung ihrer Eigenschaften und Anwendungen macht einen großen Theil der höheren Geometrie aus. Keine derselben erreicht jedoch an häufigem Vorkommen sowohl und Nutzen, als an Leichtigkeit in ihrer Erklärung den Kreis; weßhalb Elementar-Geometrien keine andere krumme Linie in Betrachtung ziehen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Flächen und Körper. — Ebenen. — Krumme Flächen. — Ein Würfel. — Kubikzoll. — Parallelopipede. — Ihre Zerfällung in Würfel. — Numerischer Ausdruck des körperlichen Inhaltes eines Parallelopipedes.

138.

Wir wollen nun im Folgenden uns mit den wichtigsten Eigenschaften der Flächen und Körper bekannt machen.

Unter Körper aber versteht man in der Geometrie jeden von Flächen eingeschlossenen Raum, so daß die Flächen ganz ebenso als Gränzen der Körper, wie die Linien als Gränzen der Flächen sich darstellen.

In seiner ganzen Ausdehnung ist dieser Theil der Geometrie einer der schwierigsten; aber so wie sich bei Anfängern die Lehre von den Linien auf die Gerade und den Kreis beschränkt, so wollen wir auch von den Flächen und Körpern nur die einfachsten kennen lernen, die glücklicherweise zugleich die nützlichsten und wichtigsten sind.

Die einfachste Fläche ist die ebene Fläche oder, wie sie in der Geometrie heißt, die Ebene.

Das augenfälligste Bild einer Ebene ist die Oberfläche einer in Ruhe befindlichen Flüssigkeit, z. B. eines völlig wellenlosen See's.

Eine Ebene ist offenbar unter den Flächen, was eine Gerade unter den Linien ist. Um uns zu überzeugen, ob eine Linie gerade ist, spannten wir einen Faden von einem Ende derselben zum andern; deckt der Faden die Linie überall gleichmäßig, so ist diese eine Gerade; weicht hingegen die Linie von dem Faden irgendwo ab, so ist jene eine krumme. Ganz ebenso werden wir nun auch bei einer Ebene verfahren. Spannen wir nämlich einen Faden von irgend einem Punkte der Ebene zu irgend einem andern Punkte der Ebene, so muß, wenn die unter-

suchte Fläche wirklich eine Ebene ist, der Faden dieselbe durchaus gleichmäßig berühren.

Indeß wird man nicht immer dieß Berühren als einen Beweis für das Ebenseyn der fraglichen Fläche betrachten können. So wird z. B. ein Faden, den man längs eines runden Stabes spannt, oder um denselben herumlegt, den Stab allerdings durchaus gleichmäßig berühren können, und doch die Oberfläche des Stabes offenbar eine Krumme seyn; allein bei näherer Betrachtung sehen wir, daß im ersten Falle der Faden nur in einer gewissen, bestimmten Lage der Bedingung des Anliegens entspricht, und daß im zweiten Falle der Faden auf eine Art gespannt wird, wo er aufhört eine gerade Linie darzustellen, und man im Grunde nur dem Widerstande des Stabes zuzuschreiben hat, wenn der Faden nicht in denselben eindringt, statt ihn von außen zu berühren.

Wenn also ein zwischen zwei Punkten einer Fläche gespannter Faden durch sein Anliegen an derselben beweisen soll, daß die Fläche eine Ebene ist, so muß der Faden die Fläche berühren, ohne irgend einen Druck auf dieselbe zu üben, und dieß nicht bloß zwischen gewissen zwei Punkten der Fläche, sondern zwischen jeden, beliebig gewählten zwei Punkten derselben thun.

So gelangen wir zu dem Begriff einer Ebene, der in der That auch in der Geometrie so gegeben wird. Man nennt nämlich hier eine Ebene eine

solche Fläche, in welcher man von jedem Punkte zu jedem anderen stets eine gerade Linie ziehen kann, welche die Fläche nirgends verläßt; eine Eigenschaft, die keine andere Fläche hat. Während man z. B. wohl auf der Oberfläche des oben besprochenen Stabes zwischen zwei gewissen Punkten eine, in der Fläche selbst liegende gerade Linie ziehen kann, ist dieß doch nicht möglich zwischen irgend zwei anderen, beliebigen Punkten jener Oberfläche; ja es gibt krumme Flächen, in denen man durchaus keine Geraden ziehen kann, wie z. B. die Oberfläche eines Eies.

139.

Man sieht nun von selbst, daß die Ebene die einfachste aller Flächen ist, und wir wollen deßhalb auch mit der Erklärung solcher Körper beginnen, die lediglich von Ebenen gebildet werden.

Der erste Körper, mit dessen Eigenschaften wir uns bekannt machen wollen, sey der Würfel oder Kubus, den Fig. 101 vorstellt.

140.

Man nennt die Ebenen, welche einen Körper umschließen, seine Seiten, und die Geraden, welche die Gränzen jener Ebenen bilden, seine Kanten.

141.

Ein Würfel hat nun sechs Seiten, die unter einander gleiche Quadrate, und zwölf Kanten, die durchaus gleich lang sind.

Beträgt die Länge einer solchen Kante einen Zoll, so ist offenbar jede der sechs Seiten ein Quadratzoll, und man nennt in diesem Falle den Würfel einen Kubikzoll. Messen jene Kanten einen Fuß, eine Klafter u. s. w., so heißt der entsprechende Würfel ein Kubikfuß, eine Kubikklafter u. s. w.

Ein Würfel ist unter den Körpern, was ein Quadrat unter den Flächen, und so wie man Flächen mit Quadraten ausmißt, so bestimmt man auch die Größe eines Körpers nach Würfeln, und sagt, er habe so und so viele Kubikzolle oder Kubikfuße u. dgl.

Alle an einem Würfel vorkommenden Winkel sind Rechte; je drei Kanten stoßen in jeder Ecke durchaus unter rechten Winkeln zusammen, und je zwei der Seiten des Würfels treffen sich in einer Kante stets ebenfalls unter rechten Winkeln. Aber diese Eigenschaft kommt eben so wenig unter den Körpern dem Würfel ausschließlich zu, als sie unter den Flächen bloß das Quadrat auszeichnet. Es gibt eben so gut durchaus rechtwinklige Körper mit ungleichen Kanten, als es Rechtecke mit ungleichen Seiten gibt. Wir haben in Fig. 102 zwei gleiche Würfel über einander gesetzt, und dadurch einen Körper gebildet, der wie der Würfel Fig. 101 rechtwinklige Ecken hat, aber dessen Seiten keineswegs durchaus Quadrate sind. Bloß die unterste Seite und die oberste blieben Quadrate, die senkrechten Seiten hingegen sind Rechtecke geworden, deren jedes

zweien jener Quadrate gleichkommt. Sind jene Quadrate Quadratzolle, so betragen diese Rechtecke zwei Quadratzolle.

Ein solcher Körper hört aber auf, ein Kubus zu heißen, und verhält sich zu diesem ganz ebenso wie ein Rechteck zum Quadrate.

142.

Es gibt eine gewisse Gattung Körper, die unter den körperlichen Figuren gerade das sind, was die Parallelograme unter den ebenen Figuren; man nennt sie Parallelopipede.

Der eben in Fig. 102 dargestellte Körper ist ein rechtwinkliges Parallelopiped. Stellen wir in Fig. 103 drei gleiche Würfel, etwa lauter Kubikzolle, übereinander, so ist der so entstehende Körper gleich drei Kubikzollen und offenbar ebenfalls ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Höhe aber dreimal so groß als die Basis ist. In demselben Maaße also, in welchem man die Höhe eines Parallelopipedes vergrößert, nimmt auch das Parallelopiped selbst an Größe zu; beträgt seine Höhe zwanzig Zolle, so faßt es zwanzig Kubikzolle, beträgt die Höhe dreißig Zolle, so hat das Parallelopiped dreißig Kubikzolle u. s. f.

Setzen wir sechs Kubikzolle auf die in Fig. 104 angezeigte Art auf und neben einander, so entstehen zwei rechtwinklige Parallelopipede, die mitsammen einen Körper bilden, der von allen bisher betrachteten

verschieden ist. Die oberste und unterste Fläche dieses Körpers sind Rechtecke, deren Seiten ein und zwei Zolle messen; zwei der senkrechten Flächen sind Rechtecke über einen und drei Zolle, und zwei sind Rechtecke über zwei und drei Zolle. In der Basis des Körpers sind zwei Quadratzolle enthalten, die Höhe desselben beträgt drei Zolle. Multiplicirt man diese beiden Zahlen, nämlich die Anzahl Quadratzolle der Basis mit der Anzahl Zolle der Höhe, so erhält man die Zahl sechs zum Produkt, und dieß ist gerade die Anzahl der in dem Körper enthaltenen Kubikzolle.

Dieß Verfahren wäre ganz ähnlich dem, welches wir oben für die Bestimmung des Flächeninhaltes eines Rechteckes durch Multiplication der Basis in die Höhe fanden, und in der That ist dasselbe auch ebenso allgemein gültig, wie dieses, wovon wir uns durch die folgende Schlußfolge überzeugen können.

Sey Fig. 105 ein Rechteck, dessen Seiten fünf und sechs Zolle lang sind, und welches demnach dreißig Quadratzolle faßt, die wir auch hier verzeichneten, indem wir die einen zwei Seiten in fünf, die anderen in sechs gleiche Theile theilten, und die Theilungspunkte der einander gegenüber liegenden Seiten durch gerade Linien verbanden. Setzte man nun auf jeden dieser Quadratzolle einen Kubikzoll, so entsteht auf diese Art ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Basis dreißig Quadratzolle faßt, und

das einen Zoll Höhe hat. Es sind aber im Ganzen gerade dreißig Kubikzolle vorhanden.

Stellte man nun auf jeden dieser Kubikzolle wieder einen Kubikzoll, so würde ein Körper entstehen, der sechszig Kubikzolle faßte; dieser Körper aber wäre ein rechtwinkliges Parallelopiped, dessen Basis dreißig Quadratzolle hat, und dessen Höhe zwei Zolle mißt, u. s. f. für alle senkrechte Parallelopipede, da man sich offenbar jeden solchen Körper auf die eben betrachtete Art in Schichten von Kubikzollen zerlegt denken kann, wo dann so viele solcher Schichten seyn werden, als die Höhe des Parallelopipedes Zolle mißt, und jede solche Schichte so viele Kubikzolle enthalten wird, als die Basis des Parallelopipedes Quadratzolle hat. Wir haben demnach für die Bestimmung der Größe, oder, wie man dieß in der Geometrie nennt, des körperlichen Inhaltes eines senkrechten Parallelopipedes folgende Regel:

143.

Der körperliche Inhalt eines rechtwinkligen Parallelopipedes, ausgedrückt in Kubikzollen, Kubikfußen u. s. w., ist gleich dem Produkte der Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. s. w., welche die Basis enthält, in die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w., welche die Höhe des Parallelopipedes begreift.

Das Jedem zunächst liegende Beispiel eines rechtwinkligen Parallelopipedes ist ein gewöhnliches

regelmäßig gestaltetes Zimmer, da Decke, Wände und Fußboden durchaus unter rechten Winkeln zusammenstoßen, und jede Ecke von drei rechten Winkeln gebildet wird. Wenn also ein Zimmer z. B. 20 Fuße lang, 15 breit, und 14 hoch ist, so enthält es offenbar 4200 Kubikfuße, denn die Basis oder hier der Fußboden hat 15 mal 20, d. h. 300 Quadratschuhe, die Höhe beträgt 14 Fuße, also der körperliche Inhalt 14 mal 300, d. h. 4200 Kubikfuße.

Sechszehnter Abschnitt.

Zerfällung von Parallelopipeden in Säulen und Schichten. — Senkrechte Körper im Allgemeinen. — Methode, ihren Körperinhalt zu bestimmen. — Prismen. — Cylinder. — Vergleichung beider Körper in Bezug auf ihren Körperinhalt. — Schnitte durch diese Körper.

144.

Man kann sich ein rechtwinkliges Parallelopiped eben so gut, als, wie wir es eben thaten, aus parallelen Schichten, auch aus senkrechten Säulen zusammengesetzt, vorstellen. Denkt man sich nämlich auf jeden Quadratzoll der Basis eine Säule aus Kubikzollen errichtet, so wird das Parallelopiped offenbar so viele solcher Säulen enthalten, als die Basis Quadratzolle hat, und jede solche Säule so

viele Kubikzolle fassen, als die Höhe des Parallelopipedes Zolle mißt.

Hätten wir die Basen der einzelnen Säulen kleiner als einen Quadratzoll gemacht, so würde natürlich dasselbe Parallelopiped eine viel größere Anzahl solcher kleinerer Säulen enthalten. So z. B. wenn man das Parallelopiped sich aus Säulen zusammengesetzt dächte, deren Basis nur das Quadrat des $^{1}/_{100}$ Theiles eines Zolles betrüge, so würden erst 10000 solcher kleiner Säulen eine derjenigen Säulen bilden, die wir uns früher über einen Quadratzoll errichtet dachten, da ein Quadratzoll 10000 der kleinen Quadrate enthält, die über dem $^{1}/_{100}$ eines Zolles errichtet werden.

Denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelopiped in sehr viele, sehr dünne Säulen dieser Art zerlegt. Indem man die Anordnung dieser Säulen ändert, kann man einen anderen senkrechten Körper bilden, dessen Basis zwar gleichen Flächenraum einnimmt, wie die Basis des Parallelopipedes, aber doch völlig verschieden gestaltet ist. Lassen wir diese neue Basis z. B. ein Dreieck seyn, so wird das rechtwinklige Parallelopiped in eine aufrechtstehende dreieckige Säule verwandelt werden, etwa wie die durch Fig. 106 vorgestellte. Zwar werden die Seiten dieses neuen Körpers keine vollkommenen Ebenen seyn, da die Schneiden der kleinen Säulen, aus denen wir den Körper zusammensetzten, nothwendig Unebenheiten bilden müssen; allein in je

mehr solcher schmalen Säulen wir das ursprüngliche Parallelopiped uns zerfällt denken, desto dünner werden diese Säulen, und desto kleiner auch die Unebenheiten ausfallen, die sie bei ihrer Aneinandersetzung zwischen sich übrig lassen, bis endlich jene Zerfällung des Parallelopipedes hinreichen wird, alle Zwischenräume verschwinden, und die Seiten des Körpers Fig. 106 völlig eben erscheinen zu machen.

Ebenso aber, wie hier diesen dreieckigen, wird man jeden anderen aufrechten Körper durch verschiedene Anordnung der kleinen Säulen bilden können, und alle diese Körper werden gleiche Höhe und dem Flächeninhalte nach gleich große Basis mit dem ursprünglichen Parallelopipede haben.

Aus Allem dem folgt nun, daß der körperliche Inhalt aller Körper, die von senkrechten Seiten gebildet werden, lediglich von der Größe ihrer Basis und ihrer Höhe, aber durchaus nicht von ihrer Gestalt abhänge.

145.

Unser oben (143) für rechtwinklige Parallelopipede aufgestellte Lehrsatz gilt also allgemein für alle Gattungen senkrechter Körper, und man findet stets deren körperlichen Inhalt, z. B. in Kubikzollen, wenn man die Anzahl Quadratzolle der Basis in die Anzahl Zolle der Höhe multiplicirt.

Dieser Satz dehnt sich offenbar auch auf senkrechte Körper mit kreisförmiger, oder sonst

krummliniger Basis aus, und man wird daher nach ihm auch den Inhalt eines wie immer gestalteten Gefäßes bestimmen können, wofern dasselbe nur senkrechte Wände hat. Diese letzte Bedingung ist aber wohl im Auge zu behalten, da obiges z. B. bei einem gewöhnlichen Fasse, dessen Dauben in der Mitte vorspringen, und also keineswegs senkrechte Wände bilden, keine Anwendung findet.

146.

Durch das Vorhergehende sind wir nun in den Stand gesetzt, Körper von senkrechten Seiten ihrer Größe nach zu vergleichen, wie verschieden auch ihre Basen gestaltet seyn mögen. Wenn z. B. zwei solche Körper dem Flächenraume nach gleiche Basen hätten, deren eine aber ein Dreieck, und deren andere ein Viereck wäre, und wenn die Höhe des einen zwei Drittheile der Höhe des anderen Körpers betrüge, so müßten offenbar ihre körperlichen Inhalte in demselben Verhältnisse, wie ihre Höhen, stehen, und also der eine zwei Drittheile des anderen Körpers fassen.

Wären umgekehrt die Höhen zweier solcher Körper gleich und die Basen verschieden, so müßten die körperlichen Inhalte sich wie die Flächeninhalte der Basen verhalten.

Senkrechte Körper von ungleicher Basis können also gleiche Flächeninhalte haben, wenn die Basis des einen in demselben Verhältnisse kleiner ist, als

die Basis des anderen, in welchem die Höhe des ersten größer ist als die Höhe des zweiten, denn was dann der eine Körper an Höhe verliert, gewinnt er an Breite und umgekehrt.

147.

Körper von senkrechten Seiten, wie die eben betrachteten, die man im gemeinen Leben Säulen nennt, heißen in der Geometrie gerade Prismen, und werden, je nach der Anzahl ihrer senkrechten Seiten, in dreiseitige, vierseitige u. s. f. unterschieden. Fig. 106 stellt also ein dreiseitiges gerades Prisma vor; vierseitige gerade Prismen sind gerade Parallelopipede, und, wenn die Basis ein Rechteck ist, rechtwinklige Parallelopipede; ein vierseitiges gerades Prisma mit durchaus gleichen Seiten, d. h. lauter Quadraten, ist, was wir früher einen Würfel nannten.

148.

Ein Prisma mit kreisförmiger Basis heißt ein Cylinder, von einem griechischen Worte, welches „rollen“ bedeutet.

149.

Ein Cylinder ist also einem Prisma im körperlichen Inhalte gleich, wenn beide Körper gleich große Basis und Höhe haben, und unterscheidet sich in diesem Falle nur durch die Gestalt von demselben.

150.

Wenn man eine Anzahl Münzen so über einander legt, daß sie einen senkrechten Cylinder Fig. 107 bilden, und hierauf die Münzen gleichmäßig verschiebt, wodurch sie in einen schiefen Cylinder Fig. 108 zu liegen kommen, so entstehen zwei Körper, die offenbar gleiche Basis, gleiche Höhe, und, da überall dieselben Münzen verwendet sind, auch gleichen Körperinhalt haben. Diese Bemerkung führt uns zu einem höchst merkwürdigen geometrischen Satze, vermöge welchem die eben für senkrechte Prismen und Cylinder gefundene Bestimmungsart des körperlichen Inhaltes auch auf schiefe Körper dieser Art ausgedehnt wird, gerade wie wir oben (65) von Rechtecken auf Parallelograme im Allgemeinen übergingen. Denn was wir eben vom Cylinder sahen, gilt offenbar auch von Parallelopipeden; legt man z. B. einen Pack Spielkarten so zusammen, daß sie ein senkrechtes Parallelopiped Fig. 109 bilden, so hat dieser Körper offenbar denselben körperlichen Inhalt, wie das durch gleichmäßige Verschiebung derselben Karten nach einer gewissen Richtung entstandene schiefe Parallelopiped Fig. 110, oder das durch Verschiebung in entgegengesetzter Richtung gebildete Fig. 111, wenn in allen drei Körpern gleich viele und gleich große Karten vorhanden sind. Der körperliche Inhalt solcher Körper bleibt also ungeändert, so lange Basis und Höhe dieselben bleiben.

151.

Alle solchen Körper, die die einander gegenüber liegenden Seiten parallel haben, begreift man unter dem Namen Parallelopipede, und unterscheidet sie in gerade und schiefe, je nachdem vier Seiten derselben auf die beiden anderen Seiten senkrecht stehen oder nicht. Ein rechtwinkliges Parallelopiped, wie wir es oben betrachteten, ist also ein gerades, durchaus von Rechtecken gebildetes.

152.

Ihr körperlicher Inhalt ist stets gleich dem Produkte der Basis in die Höhe, wo man unter Höhe eine von irgend einem Punkte der obersten Seite auf die unterste, oder auf deren Erweiterung gezogene Senkrechte versteht.

153.

Schneidet man beliebig und ganz unregelmäßig gestaltete, aber unter einander gleiche Figuren aus Papier aus, so kann man, indem man dieselben auf einander legt, gerade und schiefe Prismen der mannigfaltigsten Art bilden, die alle gleiche Basis, gleiche Höhe und gleichen körperlichen Inhalt haben.

154.

Gerade Prismen sind also schiefen gleich, wofern sie nur mit denselben gleiche Basis und gleiche Höhe haben.

155.

Wenn man sich einen Körper durch eine Ebene getheilt denkt, so heißt die Theilungs-Ebene ein Schnitt.

156.

Schneidet man ein Prisma parallel zu seiner Basis, so ist der Schnitt eine der Basis ähnliche und gleiche Figur. Ein dreiseitiges Prisma gibt in diesem Schnitte immer ein seiner Basis congruentes Dreieck, ein Parallelopiped ein seiner Basis gleiches und ähnliches Parallelogram u. s. w. Dieß wird von selbst ersichtlich, wenn wir bedenken, daß diese Körper ja eben dadurch entstehen, daß man gleiche und ähnliche Figuren über einander legt; so muß also z. B. der zur Basis parallele Schnitt eines Cylinders durchaus einen dieser Basis gleichen Kreis geben.

157.

Ein Prisma hat demnach in allen Punkten gleiche Gestalt und gleichen Umfang.

Siebzehnter Abschnitt.

Pyramiden und Kegel. — Vergleichung ihres körperlichen Inhaltes. — Pyramiden und Kegel, verglichen mit Prismen und Cylindern.

158.

Wir sahen soeben, daß ein zur Basis paralleler Schnitt des Prisma überall der Größe, wie der Gestalt nach dieselbe Figur gibt. Nun wollen wir eine Gattung Körper kennen lernen, in welchen zur Basis parallele Schnitte zwar unter einander ähnliche, aber keineswegs gleich große Figuren bilden. Fig. 112 stellt uns einen Körper vor, dessen Basis die fünfseitige Figur ABCDE ist; jeder zu dieser Grundfläche parallele Schnitt ist zwar auch eine der Basis ähnliche fünfseitige Figur, nimmt aber in der Größe stufenweise ab, je näher man zu der Spitze P des Körpers gelangt.

Man nennt solche Körper in der Geometrie Pyramiden, von einem griechischen Worte, welches „Flamme" bedeutet, weil dieselben mit einer Kerzenflamme viele Aehnlichkeit haben. Je nachdem die Basis einer Pyramide ein Dreieck, Viereck u. s. w. ist, unterscheidet man dreiseitige, vierseitige u. s. w. Pyramiden. Die Seiten dieser Körper sind offenbar Ebenen, so daß ein von ihrer Spitze oder, wie der Kunstausdruck dafür lautet, ihrem Scheitel

zu irgend einem Punkte der Kanten gespannter Faden die Seitenflächen durchaus und gleichmäßig berührt.

159.

Ist die Basis einer Pyramide kreisförmig, so heißt der Körper ein **Kegel**. In diesem werden also zur Basis parallele Schnitte durchaus Kreise geben, die gegen den Scheitel hin immer kleinere und kleinere Halbmesser haben.

160.

Wie wir eben ein Prisma dadurch bildeten, daß wir gleiche und ähnliche Figuren über einander legten, so wird offenbar auch eine Pyramide entstehen, wenn wir ähnliche aber immer kleiner und kleiner werdende Figuren über einander setzen. Untersuchen wir nun, in welchem Verhältnisse zu der Entfernung von der Basis diese Figuren sich verkleinern.

Ziehen wir zu diesem Behufe in der Pyramide Fig. 113 die Linien ab, bc, cd, de und ae, und denken wir uns dieselben als durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt erzeugt, so ist offenbar ab parallel zu AB, bc parallel zu BC, u. s. f. Das Dreieck Pab ist also ähnlich dem Dreiecke PAB, das Dreieck Pbc ähnlich dem Dreiecke PBC u. s. f. Mithin, wenn Pa die Hälfte von PA, so ist auch ab die Hälfte von AB, bc die Hälfte von BC u. s. w. Befindet sich also der Schnitt gerade in

der Mitte zwischen Scheitel und Basis, so sind die Seiten der Schnittfigur halb so groß als die Seiten der Basis. Da aber die Flächeninhalte ähnlicher Figuren sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Seiten (81), so beträgt in diesem Falle die Schnittfläche ein Viertheil der Grundfläche.

161.

Es sind demnach in einer Pyramide die Seiten eines zur Basis parallel geführten Schnittes in demselben Verhältnisse kleiner, als die Seiten der Basis, in welchem die Distanz des Schnittes vom Scheitel kleiner ist, als die Distanz der Basis vom Scheitel.

Haben also zwei Pyramiden gleiche Basis und gleiche Höhe, so sind durch sie in gleichen Distanzen von ihren Scheiteln geführte Schnitte ebenfalls gleich; denn beide Schnitte müssen in demselben Verhältnisse kleiner seyn, als die beiden gleichen Basen. Befinden sich z. B. die Schnitte in beiden Pyramiden in der Mitte zwischen Basis und Scheitel, so betragen die von denselben gebildeten Figuren jede ein Viertheil der zugehörigen Basen, und, da diese gleich sind, so müssen auch jene Figuren gleich seyn.

Ein sehr wichtiger Satz, da er uns, wie wir gleich sehen werden, lehrt, daß Pyramiden mit gleicher Basis und Höhe gleichen körperlichen Inhalt haben.

162.

Eine Pyramide besteht nämlich, wie wir oben sagten, aus über einander liegenden immer kleiner werdenden ähnlichen Figuren. Denken wir uns nun zwei Platten von gleicher Dicke und gleichem Flächeninhalte, aber verschiedener Gestalt, z. B. die eine dreieckig, die andere viereckig, aber jede hundert Quadratzolle fassend, so werden, wenn wir auf diese Platten ähnlich gestaltete gleich dicke, aber stufenweise im Umfange abnehmende Platten legen, zwei Pyramiden entstehen, welche, wenn man auf beide gleich viele Platten legte, gleiche Höhen hätten, da die Höhe eben durch die Anzahl der gleich dicken Platten bestimmt wird, wenn man unter Höhe wieder eine vom Scheitel der Pyramide auf die Grundfläche gefällte Senkrechte versteht. Diese Pyramiden haben, wie wir sagten, dem Flächeninhalte nach gleiche Grundflächen; aus (161) folgt, daß auch die Platten, welche unmittelbar ober den Basen liegen, dem Flächenraume nach gleich sind, da dieser letzte nämlich im Verhältnisse der Entfernungen von der Basis, welche hier in beiden Pyramiden dieselben sind, abnimmt. Dasselbe gilt von dem nächsten Plattenpaare u. s. w.

Da somit beide Pyramiden aus gleich vielen Platten bestehen, die paarweise einander gleich sind, so haben beide Pyramiden gleichen körperlichen Inhalt.

Zwar scheint bei dieser Beweisart, als wenn die Seiten der Pyramiden keine Ebenen, sondern staffelartig eingeschnittene Flächen, und die Scheitel derselben keine Spitzen, sondern kleine Ebenen seyn müßten; allein, da die hier befolgte Schlußweise für jede Anzahl und Dicke der Platten gilt, so hindert uns nichts, dieselben so dünn und ihre Anzahl so bedeutend zu machen, als wir nur immer wollen, so daß jene Unebenheiten der Seiten endlich ganz verschwinden, und die Scheitel von vollkommenen Spitzen nicht mehr zu unterscheiden seyn werden.

Pyramiden von gleicher Höhe und gleicher Basis haben also gleichen körperlichen Inhalt, mögen sie auch sonst noch so verschieden gestaltet seyn.

163.

Wir haben in Fig. 114 ein gerades Prisma verzeichnet, dessen Basis ein gleichseitiges Dreieck ABC ist; die drei senkrechten Seiten des Prisma sind unter einander gleiche Rechtecke.

Ziehen wir in der Seitenfläche ABba die Diagonale aB, und in der Fläche bBCc die Diagonale cB. Führt man nun einen Schnitt durch das Prisma im Punkte B längs der beiden eben gezogenen Diagonalen, so schneidet man dadurch eine dreiseitige Pyramide ab, deren Basis cBb die Hälfte einer rechtwinkligen Seite des Prisma, und deren Höhe der Senkrechten von a auf cb, oder von A auf CB gleich ist. Zieht man ebenso in der

dritten rechtwinkligen Seite des Prisma die Diagonale aC, so kann man wieder eine dreiseitige Pyramide erhalten, indem man durch das Prisma einen Schnitt in den Punkten a, C und B führt. Diese Pyramide wird, wie die frühere, die Hälfte aBA einer rechtwinkligen Seite des Prisma zur Basis, und zur Höhe die Senkrechte von C auf AB haben, die der früher betrachteten Senkrechten von A auf CB gleich ist. Die beiden abgeschnittenen Pyramiden haben daher gleiche Basen und gleiche Höhen, und folglich gleichen körperlichen Inhalt.

Bei diesem Verfahren blieb jedoch von dem Prisma ein Stück über, welches selbst eine dreiseitige Pyramide ist, die die Hälfte cCB einer rechtwinkligen Seite cbBC des Prisma zur Basis, und die Senkrechte von a auf cb oder von A auf CB zur Höhe hat, und die folglich beiden früheren Pyramiden wieder gleich ist.

Das Prisma hat also einen dreimal größeren körperlichen Inhalt, als eine dieser gleichen Pyramiden, da dasselbe alle drei umfaßt.

164.

Betrachtet man ABC als die Basis der Pyramide, deren Scheitel in a ist, so hat dieselbe mit dem Prisma gleiche Basis und Höhe; der körperliche Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist daher stets dem dritten Theile des körperlichen Inhaltes eines dreiseitigen Prisma gleich, welches mit der Pyramide gleiche Basis und Höhe hat.

Allein dieser Satz gilt allgemeinen, nicht bloß für dreiseitige Prismen und Pyramiden; denn, wie wir in (154) zeigten, sind Prismen von gleicher Höhe und Basis gleich, welches auch ihre Gestalt sey, folglich ist auch ein dreiseitiges Prisma jedem anderen, mehrseitigen Prisma gleich, wofern es nur mit diesem gleiche Höhe und gleiche Basis hat. Ferner ist auch eine dreiseitige Pyramide, wie wir aus (162) wissen, jeder mehrseitigen oder sonst irgend anders gestalteten an Körperinhalt gleich, wofern nur beide Pyramiden gleiche Basis und Höhe haben. Was also von einer Gattung Prismen oder Pyramiden in Bezug auf ihren Körperinhalt erwiesen ist, gilt auch von jeder anderen Gattung dieser Körper, und wir haben allgemein den Satz:

Wenn ein Prisma mit einer Pyramide gleiche Basis und Höhe hat, mögen beide wie immer gestaltet seyn, so ist der körperliche Inhalt der Pyramide dem dritten Theile des körperlichen Inhaltes des Prisma gleich.

165.

Daraus ergibt sich aber nun folgende höchst einfache Regel für die Bestimmung des körperlichen Inhaltes einer Pyramide: Man multiplicire die Anzahl Zolle, Fuße u. s. w. der Höhe mit der Anzahl Quadratzolle, Quadratfuße u. s. w. der Basis, und dividire das Produkt durch 3; der Quotient ist der gesuchte körperliche Inhalt der Pyramide. Das

zuerst gebildete Produkt nämlich gibt den körperlichen Inhalt eines Prisma mit Höhe und Basis der Pyramide, und es ist daher davon der dritte Theil zu nehmen, um den gesuchten Inhalt der Pyramide zu erhalten.

166.

Betrüge z. B. die Höhe einer Pyramide 6 Zoll, ihre Basis 25 Quadratzolle, so ist der körperliche Inhalt derselben 50 Kubikzolle, da 6mal 25 oder 150 durch 3 dividirt 50 gibt.

167.

Da Kegel lediglich Pyramiden mit kreisförmiger Basis, so wie Cylinder Prismen mit kreisförmiger Grundfläche sind, so läßt sich schon von vorn herein vermuthen, daß Obiges auch für Kegel und Cylinder gälte, und in der That ist dieß auch der Fall. Wir haben in Fig. 115 und 116 einen Kegel und einen Cylinder dargestellt, die gleiche Basis und Höhe haben. Hätte man diese Körper aus Metall oder sonst einem gleichförmigen Stoffe gebildet, so fände man, daß der Cylinder genau das Dreifache des Kegels wiegt, zum Beweise, daß ein Kegel stets den dritten Theil des körperlichen Inhaltes eines Cylinders fasse, der mit ihm gleiche Basis und Höhe hat.

Achtzehnter Abschnitt.

Körperlicher Inhalt von Prismen im Allgemeinen. — Oberflächen von Prismen und Cylindern. — Regelmäßige Pyramiden. — Die Oberflächen und körperlichen Inhalte von Würfeln und anderen unter einander ähnlichen Körpern nicht der Länge ihrer Kanten proportionirt.

168.

Im letzten Abschnitte lernten wir den körperlichen Inhalt von Prismen und Pyramiden bestimmen, und wollen nun sehen, wie wir die Größe ihrer Oberflächen finden können.

Da die Seiten dieser Körper durchaus ebene, von geraden Linien begrenzte Figuren sind, wie Dreiecke, Parallelograme u. dgl., so wird man zwar nach den Regeln, die wir oben für die Bestimmung des Flächeninhaltes solcher Figuren kennen lernten, leicht die Oberflächen der Körper angeben, indem man die Summe der Flächeninhalte aller Figuren bildet, von welchen der Körper eingeschlossen wird. Allein bei näherer Betrachtung der Sache zeigen sich einige Umstände, durch die man sich die Arbeit bedeutend abkürzt, und die auch in anderer Rücksicht Aufmerksamkeit verdienen.

Es stelle uns Fig. 117 ein gerades Prisma vor, dessen Basis eine ebene, geradlinige Figur ist. Die senkrechten Seiten desselben sind offenbar Recht=

ecke, die durchaus gleiche Höhe, und die Seiten der Grundfläche des Prisma zu Basen haben. Der Flächeninhalt eines solchen Rechteckes wird daher dem Produkte der gemeinschaftlichen Höhe in die zugehörige Seite der Grundfigur gleich seyn. Der Flächeninhalt sämmtlicher senkrechter Seiten des Prisma wird also gleich seyn dem Produkte der Höhe desselben in die Summe der Seiten der Grundfigur (wo man zwischen Seiten eines Kölpers und einer Figur wohl zu unterscheiden hat. Jene sind Flächen, diese Linien). Wenn z. B. die Höhe 10 Zolle, und die Seiten der Grundfigur der Reihe nach 2, 3, 4, 5, 7 und 9 Zolle betrügen, so wären die senkrechten Seiten des Prisma sechs Rechtecke mit gemeinschaftlicher Höhe von 10 Zollen, und Basen von 2, 3, 4, 5, 7 und 9 Zolle; diese Rechtecke zusammen hätten aber genau denselben Flächeninhalt, wie ein Rechteck, dessen Höhe ebenfalls 10 Zolle, und dessen Basis 30 Zolle, nämlich die Summe der Basen jener sechs Rechtecke betrüge, so daß wir den Flächeninhalt der senkrechten Seiten des Prisma gleich 300 Quadratzollen, d. h. dem Produkte der Höhe von 10 Zollen in den ganzen Umfang der Grundfigur des Prisma von 30 Zollen finden.

Dieß Verfahren wird noch ersichtlicher, wenn man sich einen Streifen Papier um das Prisma so gelegt denkt, daß er nirgend vorspringt oder doppelt liegt, und nur eben die senkrechten Seiten des Prisma deckt. Nimmt man dieß Papier dann weg,

und breitet man es aus, so muß es offenbar die Gestalt eines Rechteckes haben, dessen Höhe 10 und dessen Basis 30 Zolle beträgt.

169.

Dasselbe muß auch von einem Cylinder gelten, und auch hier muß, wenn man einen Streifen Papier, der ihn nur eben genau deckte, aufrollt, derselbe ein Rechteck bilden, dessen Höhe die Höhe des Cylinders, und dessen Basis der Umfang des Kreises ist, der dem Cylinder zur Grundfläche dient.

Man findet also die Oberfläche von Prismen und Cylindern, indem man ihre Höhe mit dem Umfange ihrer Grundfläche multiplicirt, wobei aber unter Oberfläche bloß die senkrechten Begrenzungen der Körper gemeint sind; den Flächeninhalt der Basis und der ihr gegenüber liegenden, obersten Seite des Körpers wird man, wenn es nöthig seyn sollte, auf die bei ebenen Figuren gewöhnliche Art für sich bestimmen müssen.

Um also z. B. zu finden, wie viele Ellen Leinwand man braucht, um die senkrechten Wände eines Zimmers zu verkleiden, welches fünf Ellen hoch, und von dessen Fußboden jede Seite 22 Ellen mißt, wird man nur diese beiden Zahlen mit einander zu multipliciren haben, um sofort die Zahl 110 für die gesuchte Anzahl Ellen Leinwand zu erhalten.

170.

Unter regelmäßiger Pyramide versteht man eine Pyramide, die ein regelmäßiges Polygon (132) zur Basis, und durchaus gleich lange Kanten hat. Sey Fig. 118 eine solche Pyramide, so sind die Dreiecke, welche die Seiten desselben bilden, alle unter einander congruent, und folglich die Oberfläche einer regulären Pyramide (das Wort „Oberfläche" wieder wie oben nicht auf die Grundfläche bezogen) gleich dem Produkte der gemeinschaftlichen Höhe dieser Dreiecke in die Summe ihrer Basen oder in den Umfang der Grundfläche der Pyramide. Denkt man sich, wie oben, einen Streifen Papier um eine solche Pyramide gelegt, so wird derselbe, wenn man ihn abnehmen, und dort, wo er die Grundfläche berührte, in eine gerade Linie legen wollte, eine der Fig. 81 ähnliche Gestalt zeigen, da man nämlich, um dieß thun zu können, den Streifen Papier dort, wo er die Kanten der Pyramide berührte, wird zerschneiden müssen.

171.

Legt man einen Streifen Papier um einen Kegel, so daß er ihn nur eben bedeckt, und rollt man dasselbe dann auf, so zeigt es sich als einen der Fig. 119 ähnlichen Theil eines Kreises, der von einem Bogen und zwei Halbmessern eingeschlossen wird. Aus der eben in (170) angestellten Betrach-

tung folgt aber, daß der Flächeninhalt dieser Figur gefunden wird, indem man den Halbmesser des Kreises, dem sie angehört, mit dem halben Bogen multiplicirt; denn theilt man den Winkel C in eine Menge kleiner Winkel, so entstehen eben so viele schmale Dreiecke, die, wenn man den Bogen der Fig. 118 in eine gerade Linie legt, wieder die Gestalt der Figur 81 annehmen.

Die Oberfläche eines Kegels (ohne Grundfläche) ist also gleich dem halben Produkte der Distanz seiner Basis vom Scheitel (auf der Oberfläche des Kegels genommen) mit dem Umfange der Basis.

172.

Gesetzt, man hätte eine Anzahl Kubikzolle, und wollte damit einen Kubus bilden, dessen Kanten durchaus zwei Zolle lang sind. Da die Seiten eines Kubus Quadrate sind, so müssen die Seiten eines solchen Kubus vier Quadratzolle enthalten, und somit zur Bildung einer solchen Seite vier Kubikzolle verwendet werden. Legen wir also zuerst vier solcher Kubikzolle zusammen, so entsteht ein rechtwinkliges Parallelopiped, das zur Basis (Fig. 120) ein Quadrat der gewünschten Größe hat: aber dessen Höhe beträgt nur einen Zoll. Um also auch die Höhe des Körpers auf zwei Zolle zu bringen, wird man eine zweite Schichte von Kubikzollen, der ersten ganz gleich, auf diese setzen, und so einen Körper

erhalten, wie ihn Fig. 120 darstellt, nämlich in der That einen Kubus, dessen Kanten durchaus zwei Zolle messen. Wir brauchten aber zur Bildung eines solchen Würfels acht Kubikzolle.

Wie vieler Kubikzolle würde man nun bedürfen, um einen Würfel zu bilden, dessen Kanten durchaus drei Zolle messen?

Die Basis dieses Würfels, wie überhaupt jede seiner Seiten wird offenbar neun Quadratzolle enthalten, und folglich werden, um dieselbe herzustellen, neun Kubikzolle nöthig seyn. Da aber der Würfel auch drei Zolle hoch seyn soll, so wird man offenbar drei solche Lagen von neun Kubikzollen über einander setzen müssen, um den gewünschten Körper zu erhalten. Zu einem Würfel, dessen Kanten drei Zolle messen, braucht man also dreimal neun, oder sieben und zwanzig Kubikzolle.

Und ebenso wird man nun für jeden beliebigen Würfel verfahren, wenn man wissen will, wie viele Kubikzolle er enthält. Multiplicirt man die Anzahl Zolle, welche eine Kante messen soll, mit sich selbst, so hat man die Anzahl Quadratzolle der Basis, oder, was dasselbe ist, die Anzahl Kubikzolle der untersten Schichte. Die Höhe aber, welche einer Kante des Würfels gleich kommt, gibt die Anzahl solcher Schichten, welche erfordert wird, um den fraglichen Körper zu bilden.

173.

Wenn man die Kanten eines Würfels verdoppelt, verdreifacht u. s. f., so wird der körperliche Inhalt desselben in einem viel stärkeren Verhältnisse vergrößert. Um die Zunahme des körperlichen Inhaltes zu finden, wird man, wie aus (172) hervorgeht, die Zunahme einer Kante des Würfels zweimal mit sich selbst multipliciren. Hat man also z. B. die Kanten auf das zehnfache gebracht, so ist der körperliche Inhalt 1000mal größer geworden, denn 10 gibt mit sich selbst multiplicirt 100, und dieß wieder 10mal genommen die Zahl 1000.

Und dieß ist der Grund, weßhalb man in der Arithmetik eine Zahl, die durch das zweimalige Multipliciren einer anderen Zahl mit sich selbst entstand, auch den Würfel oder Kubus dieser anderen Zahl nennt, während die eigentliche Bezeichnung dritte Potenz lautet.

174.

Was wir hier von Würfeln nachwiesen, wird allgemein von allen ähnlichen Körpern gelten, da sie gleich großen Kuben proportionirt sind. Zwei ähnliche Prismen z. B, in denen die gleichliegenden Kanten sich wie 1 zu 2 verhalten, werden, wenn man sie in Würfelform bringt, Kanten erhalten, die sich ebenfalls wie 1 zu 2 verhalten, und folglich ihre körperlichen Inhalte sich wie 1 zu 8 verhalten.

Die körperlichen Inhalte unter einander ähnlicher Körper stehen daher immer in demselben Verhältnisse, wie die dritten Potenzen ihrer gleichliegenden Kanten.

175.

Endlich werden die **Oberflächen ähnlicher Körper** sich **stets** wie die **zweiten Potenzen der gleichliegenden Kanten verhalten**, weil diese Oberflächen immer von unter einander ähnlichen ebenen Figuren gebildet werden, für deren jede obiger Satz gilt, und weil diese Figuren auf jedem der betrachteten Körper ähnlich angeordnet sind.

Neunzehnter Abschnitt.

Kugel. — Erzeugt durch die Drehung eines Kreises. — Schnitt einer Kugel. — Einer Kugel umschriebener Cylinder. — Verhältniß ihrer Größe. — Oberfläche der Kugel, verglichen mit der des Cylinders. — Mit dem Flächeninhalte eines größten Kreises der Kugel. — Bestimmung des körperlichen Inhaltes einer Kugel. — Oberflächen und Körperinhalte verschiedener Kugeln, nicht ihren Durchmessern proportional.

176.

Einer der merkwürdigsten und zugleich nützlichsten Körper, die man in der Geometrie betrachtet,

ist die Kugel oder Sphäre, ein runder Körper, dessen Oberfläche durchaus gleichmäßig gestaltet, und der unter den Körpern gerade das ist, was unter den ebenen Figuren der Kreis, so daß auch dessen geometrische Erklärung sehr ähnlich der Definition dieses letzten lautet:

Die Kugel ist nämlich ein Körper, dessen Oberfläche von einem gewissen Punkte innerhalb desselben durchaus gleich weit absteht. Diesen Punkt aber nennt man den Mittelpunkt der Kugel.

177.

Wenn man sich eine gewöhnliche Münze auf zwei Punkten ihres Umfanges, die einander genau gegenüber liegen, von zwei Nadeln gehalten denkt, so kann man die Münze leicht in eine sehr schnelle drehende Bewegung versetzen. Während dieser Bewegung glaubt man eine Kugel vor sich zu sehen, und in der That wird die Kugel auch oft als ein Körper definirt, der durch die Drehung eines Kreises um einen seiner Durchmesser entsteht. Es wird nämlich dieser Durchmesser in unserem Beispiele die Linie seyn, welche die Spitzen der beiden Nadeln verbindet.

178.

Ist also Figur 121 ein Kreis AQBQ′, und denkt man sich denselben z. B. um den Durchmesser AB sich drehend, so wird der Umfang dieses Kreises

bei dieser Drehung eine Fläche beschreiben, die die Gestalt einer Kugel hat; denn da jeder Punkt des Umfanges vom Kreise AQBQ′ von dessen Mittelpunkte C gleich weit absteht, so muß auch jeder Punkt in der durch die Drehung des Kreises beschriebenen Fläche von demselben Punkte gleich weit entfernt seyn. Es ist folglich nach der in (176) gegebenen Erklärung die beschriebene Fläche wirklich eine Kugel, und der Mittelpunkt des Kreises zugleich der Mittelpunkt derselben.

179.

Ziehen wir in Fig. 121 mehrere gerade Linien senkrecht auf den Durchmesser AB. Solche Linien werden nach (121) alle vom Durchmesser AB *halbirt*. Betrachten wir nun irgend eine derselben, z. B. die Linie PP′ näher, so finden wir, daß bei der Drehung des Kreises die Endpunkte P und P′ derselben offenbar einen Kreis beschreiben, dessen Mittelpunkt in M ist, da dieser Punkt durchaus von P und P′ gleich weit absteht, mögen P und P′ durch die Drehung in was immer für eine Lage versetzt seyn.

Denkt man sich nun die Kugel durch eine Ebene geschnitten, die durch den Punkt M geht, und senkrecht auf AB steht, so wird dieser Schnitt auf der Oberfläche der Kugel einen Kreis bilden, dessen Mittelpunkt M, und dessen Halbmesser MP ist, und es ist dieser Kreis derjenige, welchen die Punkte P und P′ bei der Drehung des Kreises AQBQ′ beschreiben. Da aber der Durchmesser AB ganz

willkührlich ist, und man den Kreis AQBQ' ebenso gut um irgend einen anderen Durchmesser hätte drehen lassen können, ohne deßwegen eine andere Kugel zu erhalten, so folgt daraus, daß eine Kugel in jeder Richtung durch eine Ebene geschnitten einen Kreis gebe.

Diese Schnitte werden jedoch Kreise von verschiedener Größe geben, und desto größer werden, je näher die schneidende Ebene am Mittelpunkte steht, so wie bei der Drehung des Kreises AQBQ' die verschiedenen Punkte seines Umfanges Kreise von verschiedener Größe, und desto größere bilden, je näher jene Punkte dem Durchmesser QQ' kommen. Ein Schnitt durch den Mittelpunkt der Kugel gibt den grösten Kreis, den man auf der Oberfläche derselben ziehen kann; jeden anderen Kreis, dessen Mittelpunkt nicht in dem der Kugel liegt, nennt man einen kleineren Kreis.

Der Durchmesser AB in Fig. 121 geht durch alle Mittelpunkte der auf demselben senkrechten Kreise, und daraus folgt von selbst, daß, wenn der Durchmesser einer Kugel durch die Mittelpunkte einer Reihe von Schnitten geht, er auf allen diesen Schnitten senkrecht steht.

180.

Wir haben in Fig. 122 eine Kugel, und um dieselbe herum einen Cylinder verzeichnet, dessen Seiten die Kugel ringsum berühren, was wir hier

durch die Linie ABD anzuzeigen suchten. Die obere und untere Endfläche des Cylinders berühren die Kugel in einem einzigen Punkte. Man sagt von einem solchen Cylinder, daß er der Kugel umschrieben sey.

Wir können uns einen klaren Begriff von der Anordnung dieser beiden Körper auch auf folgende Weise verschaffen. Fig. 123 stellt uns einen Kreis mit einem umschriebenen Quadrate vor. Denken wir uns diese Figur, wie sie ist, also Kreis und Quadrat zusammen um den Durchmesser AB sich drehend, so werden offenbar Kreis und Quadrat verschiedene Flächen beschreiben, und zwar wird jener eine Kugel und dieses einen Cylinder *bilden*; die Linien GH und IK werden bei dieser Drehung die krumme Oberfläche, uud die Linien GI und HK die, den Cylinder oben und unten begrenzenden Ebenen bilden, und es wird der Cylinder offenbar die Kugel in der Linie AB und der auf AB senkrechten, durch EF gehenden Ebene berühren, d. h. der Kugel umschrieben seyn.

181.

Denken wir uns zwei Linien LN und OQ sehr nahe an einander gezogen, beide senkrecht stehend auf AB. Diese beiden Linien erscheinen in der Figur als bloße Linien, stellen aber eigentlich zwei auf AB senkrechte Ebenen vor, die zwischen sich einen gewissen Theil von Kugel sowohl, als Cylinder ent-

halten. Dieselben schneiden auf der Oberfläche des Cylinders einen bandförmigen Streifen aus, dessen Höhe oder Breite OL ist, und der sich um den ganzen Cylinder herum erstreckt. Auf der Kugel wird von denselben Ebenen ein anderer Streifen umschlossen, dessen Breite RS ist, und der sich ebenfalls um die ganze Kugel erstreckt. Da OL senkrecht auf beiden Ebenen steht, so ist OL kürzer, als RS, das schief gegen dieselben steht, so daß der Streifen auf dem Cylinder schmäler ist, als der auf der Kugel. Andererseits ist jener Streifen länger als dieser, weil jener auf dem Cylinder sich längs eines Kreises erstreckt, dessen Halbmesser LM ist, während dieser auf der Kugel längs eines Kreises liegt, dessen Halbmesser SM ist.

Die Längen dieser ringförmigen Streifen werden zu einander im Verhältnisse der Halbmesser LM und SM stehen, da nach (101) die Peripherie verschiedener Kreise sich stets wie ihre Halbmesser verhalten. Wir wollen nun überdieß zeigen, daß RS in demselben Maaße größer als OL ist, in welchem LM größer ist als SM.

Ziehen wir zu diesem Behufe die Linien SC zum Mittelpunkte, und ST parallel zu LO. Das kleine Dreieck STR hat mit dem größeren SMC gleiche Winkel; denn die Winkel in T und M sind Rechte, ferner steht CS im Punkte S senkrecht auf dem Kreise, und MS senkrecht auf ST; CSR und MST sind folglich rechte Winkel; nimmt man von beiden den Winkel MSR weg, so bleiben wieder

gleiche Winkel übrig; es sind folglich auch die Winkel CSM und TSR gleich. Demnach haben wir zwei Winkel des einen Dreiecks als zweien Winkeln des anderen Dreiecks gleich nachgewiesen; es sind also nach (48) auch die dritten Winkel TRS und SCM einander gleich. Die beiden Dreiecke STR und SCM sind daher einander ähnlich, und es verhält sich SR zu ST, wie SC zu SM. Die Linie ST aber ist gleich der Linie LO, da beide entgegengesetzte Seiten eines Parallelograms sind (57); und SC ist gleich EC, da beide Halbmesser desselben Kreises sind (93); EC aber ist wieder gleich LM, da beide einander gegenüberliegende Seiten eines Parallelogrames sind; folglich ist LM *gleich SC.*

Demnach ist SR wirklich in demselben Maaße größer als LO, in welchem LM größer ist, als SM. Jene Linien aber sind die Breiten und diese den Längen der ringförmigen Streifen auf Kugel und Cylinder proportionirt; folglich will das eben ausgesprochene Verhältniß eigentlich sagen: gerade so vielmal als der Streifen auf der Kugel breiter ist, ist der Streifen auf dem Cylinder länger, und somit sind die Oberflächen beider Streifen einander gleich.

Zieht man nun mehrere solche unter einander parallele Linien, wie LN und OQ, so wird die Oberfläche des Cylinders und der Kugel in eine Anzahl Streifen getheilt, die paarweise unter einander gleich sind, und wir schließen demnach daraus folgenden höchst merkwürdigen Satz:

182.

Die Oberfläche einer Kugel ist der krummen Oberfläche eines, derselben umschriebenen Cylinders gleich.

183.

Wir fanden in (169), daß die krumme Oberfläche eines Cylinders dem Rechtecke über dessen Höhe und dem Umfange seiner kreisförmigen Basis gleich ist. Im gegenwärtigen Falle ist die Höhe des Cylinders der Durchmesser der einbeschriebenen Kugel, und die Basis des Cylinders ein größter Kreis (179) derselben Kugel. Die krumme Oberfläche eines Cylinders ist folglich dem Rechtecke über dem Durchmesser und dem Umfang eines größten Kreises der einbeschriebenen Kugel, oder, was dasselbe ist, dem doppelten Rechtecke über dem Halbmesser und dem Umfange eines größten Kreises der einbeschriebenen Kugel gleich.

Das Rechteck über dem Halbmesser und dem Umfange eines Kreises aber ist nach (110) gleich dem doppelten Flächeninhalt des Kreises, und somit die krumme Oberfläche eines Cylinders dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises der einbeschriebenen Kugel gleich.

Da aber nach (182) Cylinder und einbeschrieschriebene Kugel gleiche Oberflächen haben, so haben wir folgenden wichtigen Lehrsatz:

184.

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben.

Dieser Satz setzt uns in den Stand, aus dem Durchmesser einer Kugel ihre Oberfläche zu finden. Man wird nämlich zuerst nach (111) das Quadrat des Durchmessers durch 14 dividiren und den Quotienten mit 11 multipliciren, um sofort die Fläche eines größten Kreises der Kugel zu erhalten, welche mit 4 multiplicirt, die Oberfläche der ganzen Kugel gibt.

So beträgt der Durchmesser unserer Erde nahe 1719 deutsche Meilen. Das Quadrat dieser Zahl ist 2954961; diese Zahl durch 14 getheilt gibt 211068, welche Zahl 11 mal genommen gleich 2321748, und dieß ist die Anzahl Quadratmeilen, welche ein größter Kreis unserer Erde enthält; dieselbe vierfach genommen gibt 9286992 Quadratmeilen für die gesuchte Oberfläche der ganzen Erde.

185.

Da wir hier dieselbe Zahl durch 14 dividiren, und dann durch 11 und 4 oder durch 44 multipliciren, so wird es kürzer seyn, die Hälfte von 14 und 44 zu nehmen, und das Quadrat des Durchmessers durch 7 zu theilen und mit 22 zu multipliciren, wo man offenbar dasselbe Resultat

erhält. Man sieht, daß diese Regel für die Bestimmung der Oberfläche einer Kugel eine merkwürdige Aehnlichkeit mit der oben für die Fläche eines Kreises gegebenen hat, indem sich beide nur dadurch unterscheiden, daß hier das Quadrat des Durchmessers, und dort der Durchmesser selbst vorkommt, ein Umstand, auf dessen Erklärung wir aber hier nicht weiter eingehen können.

186.

Nun wird es ein Leichtes seyn, auch für die Bestimmung des körperlichen Inhaltes einer Kugel aus ihrem Halbmesser eine allgemeine Regel zu finden. Als wir oben (110) eine solche für den Flächeninhalt eines Kreises suchten, dachten wir uns den Umfang desselben in viele Theile getheilt, und über jeden solchen Theil durch zu den Endpunkten desselben gezogene Halbmesser Dreiecke construirt. Auf ähnliche Weise wollen wir uns jetzt die Oberfläche einer Kugel in eine Menge so kleiner Theile getheilt denken, daß ein einzelner solcher Theil keine merkliche Krümmung mehr zeigt, und als eine Ebene betrachtet werden kann; zieht man dann aus dem Mittelpunkte der Kugel zu jenen Theilen ihrer Oberfläche Halbmesser, so wird die Kugel selbst in eine Menge kleiner Pyramiden getheilt, die ihre Scheitel sämmtlich im Mittelpunkte, und jene Theile der Oberflächen zu Grundflächen haben. Der Körperinhalt einer Pyramide aber ist nach (165) dem Dritt-

theile des Produktes von Basis und Höhe gleich. Man müßte also, um den körperlichen Inhalt der Kugel zu finden, diese kleine Rechnung mit jeder Pyramide machen; die Summe der Körperinhalte sämmtlicher Pyramiden wäre dem körperlichen Inhalte der Kugel gleich. Einfacher aber wird man verfahren, wenn man mit einem Male die Summe aller Grundflächen der Pyramiden, d. h. die Oberfläche der ganzen Kugel mit der gemeinschaftlichen Höhe jener Pyramiden, d. h. mit dem Halbmesser der Kugel multiplicirt, und das Produkt durch 3 theilt. Wir wissen aber, daß die Oberfläche der Kugel gleich ist dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben, und somit haben wir folgende Regel:

Um den körperlichen Inhalt einer Kugel zu erhalten, muß man die vierfache Fläche eines größten Kreises derselben mit dem Halbmesser multipliciren, und das Produkt durch 3 theilen.

Allein diese Regel kann für den Gebrauch noch viel einfacher gestellt werden. In (185) fanden wir, daß die Oberfläche einer Kugel bestimmt wird, indem man das Quadrat des Durchmessers durch 7 theilt, und den Quotienten durch 22 multiplicirt; nun müßten wir die so erhaltene Zahl mit dem halben Durchmesser multipliciren, und durch 3 dividiren, oder, was dasselbe ist, mit dem ganzen Durchmesser multipliciren und durch 6 theilen. Die

ganze Operation zur Auffindung des körperlichen Inhaltes einer Kugel ist also jetzt folgende: das Quadrat des Durchmessers ist zu multipliciren mit dem Durchmesser und mit der Zahl 22, und das Produkt zu theilen durch die Zahlen 7 und 6. Das Quadrat des Durchmessers, multiplicirt mit dem Durchmesser, ist eben so viel als die dritte Potenz oder der Kubus des Durchmessers; es ist also der Kubus des Durchmessers mit 22 zu multipliciren, und das Produkt durch 6 mal 7 oder 42 zu theilen, oder, was offenbar dasselbe ist, durch 11 zu multipliciren und 21 zu theilen. Um demnach den körperlichen Inhalt einer Kugel zu finden, wird man den Kubus des Durchmessers mit 11 multipliciren und durch 21 theilen.

187.

Da alle Kugeln offenbar unter einander ähnliche Körper sind, so wird auch von ihnen gelten, was wir oben von ähnlichen Körpern überhaupt sagten, und die Oberflächen verschiedener Kugeln werden sich wie die Quadrate (zweiten Potenzen) ihrer Durchmesser, und ihre körperlichen Inhalte wie die Würfel (dritten Potenzen) der Durchmesser verhalten.

Zwanzigster Abschnitt.

Axen und Pole eines größten Kreises der Kugel. — Wie ein größter Kreis die Kugel, und wie zwei größte Kreise sich unter einander theilen. — Neigung der Ebenen zweier größter Kreise derselben Kugel. — Sie kann auf dreierlei Art gemessen werden. — Größte Kreise, die durch die Pole eines anderen größten Kreises gehen.

188.

Führen wir durch den Mittelpunkt C einer Kugel Fig. 124 einen Schnitt, so wird nach (179) der Kreis AB, welchen wir auf der Oberfläche der Kugel erzeugen, ein größter Kreis seyn. Eine auf die Ebene dieses größten Kreises senkrechte Linie DE, welche durch den Mittelpunkt C geht, und also ein Durchmesser der Kugel ist, heißt die Axe des größten Kreises AB, und die Punkte D und E, wo die Axe die Oberfläche der Kugel durchschneidet, nennt man die Pole jenes Kreises. Die Axe eines größten Kreises geht daher immer durch den Mittelpunkt der Kugel; jeder größte Kreis hat zwei Pole, und jeder Pol ist von allen Punkten der Peripherie seines Kreises um 90 Grade oder um einen rechten Winkel entfernt.

189.

Jeder größte Kreis theilt, wie man von selbst sieht, die Kugel in zwei gleich große Theile, er halbirt sie. In der Mitte der Oberfläche dieser Theile

der Kugel liegen die Pole des betrachteten größten Kreises.

190.

Da größte Kreise ihren] Mittelpunkt stets im Mittelpunkte der Kugel haben, so müssen zwei größte Kreise sich in einer geraden Linie durchschneiden, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht, d. h. ein Durchmesser der Kugel ist aber zugleich ein Durchmesser der beiden größten Kreise, die, wie alle größten Kreise einer und derselben Kugel, von gleichem Umfange sind. Zwei größte Kreise einer Kugel durchschneiden sich also immer in einem und demselben, beiden Kreisen gemeinschaftlichen Durchmesser, mit anderen Worten, zwei größte Kreise einer Kugel halbiren sich gegenseitig.

Sind z. B. Fig. 125 AB und DE zwei größte Kreise der Kugel ADBE, so durchschneiden sich ihre Ebenen in dem beiden Kreisen gemeinschaftlichen Durchmesser FG, der zugleich ein Durchmesser der Kugel ist, da er durch den Mittelpunkt C derselben geht, und die durch diesen Durchschnitt der beiden Kreise entstandenen Kreisabschnitte AFG, FGB, DFG und FGE sind als halbe Peripherien desselben Kreises einander durchaus gleich.

191.

Den Winkel, unter welchem die Ebenen zweier größten Kreise einer Kugel sich treffen, nennt man die **Neigung** dieser Ebenen gegen einander. Sie

ist offenbar dem Winkel AGD oder DFA gleich, unter welchem die Peripherieen der beiden Kreise in ihren Durchschnittspunkten G oder F einander begegnen.

192.

Denkt man sich die Axen IK und LM der beiden größten Kreise, so werden, wie man von selbst sieht, diese Axen einen Winkel ICM unter einander machen, welcher dem Neigungswinkel der beiden größten Kreise gleich ist.

Um sich hiervon völlig zu überzeugen, wird man nur bedenken dürfen, daß, wenn die beiden Kreise zusammenfielen, ihre Neigung gegen einander *also* null wäre, auch die beiden Axen zusammenfallen würden, und der Winkel zwischen diesen Axen sich in demselben Maaße vergrößern würde, in welchem man die Ebenen der beiden größten Kreise aus einander rückte, daß also der Winkel zwischen diesen Ebenen und der Winkel jener Axen wirklich stets gleich groß sind. Der Winkel, welchen die beiden Axen unter einander bilden, wird aber, da er am Mittelpunkte C der Kugel oder auch des größten Kreises AIMBKL liegt, durch Bogen dieses Kreises gemessen. Die Punkte I, M, L, K sind ferner nach (188) die Pole der beiden größten Kreise AB und DE. Es wird also die Neigung zweier größter Kreise einer Kugel gegen einander auch durch die Bogen IM und LK eines größten

Kreises gemessen, welcher durch die Pole jener Kreise geht.

193.

Nach (188) ist AI sowohl, als DM ein Bogen von 90°; nimmt man von beiden denselben Bogen DI weg, so bleiben offenbar wieder unter einander gleiche Bogen IM und AD über. Die Neigung der Ebenen zweier größter Kreise einer Kugel werden also drittens auch durch jenen Bogen AD des durch ihre Pole gehenden größten Kreises AIMBKL gemessen, welchen die beiden größten Kreise selbst einschließen.

194.

Vergrößert man allmählich die Neigung der Ebene des größten Kreises DE gegen die Ebene des größten Kreises AB, so wird auch der zwischen ihren Polen liegende, und jene Neigung nach (192) messende Bogen IM immer größer; geht endlich der Kreis DE durch die Axe IK oder, was dasselbe, durch die Pole I und K des Kreises AB, so fällt die Axe LM des Kreises DE offenbar in die Ebene des Kreises AB. Der zwischen den Polen der beiden größten Kreise liegende Bogen oder (192) die Neigung der beiden größten Kreise ist dann gleich dem Bogen MD oder IB, d. h. (188) die Neigung beider Kreise gegen einander beträgt 90° oder die beiden Kreise stehen auf einander senkrecht.

Geht also ein größter Kreis durch die Pole eines anderen größten Kreises derselben Kugel, so stehen die Ebenen derselben auf einander senkrecht.

195.

Hieraus erhellt nun aber auch der umgekehrte Satz von selbst, nämlich: Stehen die Ebenen zweier größten Kreise einer Kugel auf einander senkrecht, so geht ein größter Kreis stets durch die Pole des anderen größten Kreises.

Inhalt.

Seite

Einleitung 1

Erster Abschnitt.

Natur der geraden Linie. — Unterschied zwischen geraden und krummen Linien. — Geometrische Figuren. — Winkel. — Spitzer und stumpfer Winkel. — Rechter Winkel 5

Zweiter Abschnitt.

Dreieck. — Seiten und Winkel desselben. — Gleichheit von Dreiecken. — Bedingungen dafür. — Unterschied zwischen Dreiecken und anderen Figuren. — Gleichwinklige Dreiecke sind ähnlich. — Gleichseitige Dreiecke. — Gleiche Seiten bringen gleiche Winkel, ungleiche Seiten ungleiche Winkel mit sich. — Ein Quadrat zu verzeichnen. — Gleichseitiges Dreieck 10

Seite

Dritter Abschnitt.

Parallele Linien. — Sie schneiden sich nie. — Stehen überall gleichweit von einander ab. — Sind gleich geneigt gegen Linien, die sie schneiden. — Stehen senkrecht auf dieselbe Linie. — Eine Parallele zu ziehen 19

Vierter Abschnitt.

Aenderungen der Winkel eines Dreiecks, wenn dessen Seiten sich ändern. — Einer wächst, wenn der andere abnimmt. — Ihre Summe ist immer dieselbe, und stets gleich zwei Rechten. — Eine vierseitige Figur. — Ihre Zerfällung in Dreiecke. — Die Summe ihrer Winkel immer dieselbe, und stets gleich vier Rechten. — Derselbe Schluß auf eine fünfseitige Figur ausgedehnt. — Auf alle Figuren. — Beweisart für die Gleichheit der Winkel zweier Dreiecke. — Größe der Winkel eines gleichseitigen Dreiecks. — Eines rechtwinkligen Dreiecks 23

Fünfter Abschnitt.

Abhängigkeit der Größe der Seite eines Dreiecks von der Größe des gegenüberliegenden Winkels. — Grenzen der Summe und Differenz zweier Seiten im Vergleiche mit der dritten Seite 31

Sechster Abschnitt.

Parallele Linien. — Parallelogram. — Aenderungen der Winkel bei ungeänderten Seiten. — Die einander gegenüber liegenden Seiten und Winkel gleich. — Parallel-Lineal. — Diagonalen. — Rechtecke. — Verschiedene Eigenschaften der Parallelograme 34

Seite

Siebenter Abschnitt.

Bestimmung des Flächen-Inhaltes eines Parallelograms. — Zerfällung gleicher Parallelograme 40

Achter Abschnitt.

Numerischer Ausdruck des Flächen-Inhaltes eines Parallelogrames. — Seine Zerfällung in Quadrate. — Parallelograme lassen sich stets auf Rechtecke bringen. — Numerischer Ausdruck für die Fläche eines Dreiecks. — Für die Fläche anderer Figuren 44

Neunter Abschnitt.

Merkwürdige Eigenschaften eines rechtwinkligen Dreieckes. — Die Quadrate der Katheten zusammen gleich dem Quadrate der Hypothenuse (Eselsbrücke). — Beweis durch Zerfällung. — Andere Beweise. — Zerfällung des Quadrates einer eingetheilten Linie. — Um wie viel das Quadrat der Linie die Quadrate ihrer Theile übersteigt 50

Zehnter Abschnitt.

Aehnliche Figuren. — Aehnliche Dreiecke. — Verhältnisse ihrer Seiten. — Wie man ähnliche Dreiecke ihrer Größe nach vergleicht. — Regelmäßige und unregelmäßige Figuren. — Figuren nach kleinerem und größerem Maaßstabe 59

Eilfter Abschnitt.

Anwendungen der Eigenschaften ähnlicher Figuren. — Die Höhe eines Kirchthurmes aus der Ferne zu messen. — Die Höhe eines Berges, ohne ihn zu

Seite

erſteigen. — Die Diſtanz des Mondes von der Erde zu beſtimmen. — Eingetheilte Maaßſtäbe. — Beſtimmung kleiner Bruchtheile eines Zolles. — Eigenſchaften von vier Proportionalen. — Methode, Proportionalen zu finden 67

Zwölfter Abſchnitt.

Kreiſe. — Mittelpunkt. — Umfang. — Halbmeſſer. — Grade. — Quadranten. — Verſchiedene Eintheilungen des Kreiſes. — Grade in Minuten und Sekunden getheilt. — Quadratur des Kreiſes. — Unmöglichkeit eines genauen numeriſchen Ausdruckes des Verhältniſſes zwiſchen Durchmeſſer und Umfang. — Umfang der Erde. — Näherungsweiſe Beſtimmung des Umfanges eines Kreiſes. — Wie findet man den Flächen-Inhalt eines Kreiſes, wenn ſein Halbmeſſer gegeben iſt? 78

Dreizehnter Abſchnitt.

Eigenſchaften von Kreis-Segmenten. — Peripheriewinkel im ſelben Segmente ſind gleich. — Peripheriewinkel im Halbkreiſe ſind Rechte. — Dem Kreiſe einbeſchriebene Vierecke. — Winkel in verſchiedenen Segmenten 91

Vierzehnter Abſchnitt.

Parallele Sehnen. — Eine Tangente zu ziehen. — Einander ſchneidende Sehnen. — Einbeſchriebene und umſchriebene Figuren. — Einbeſchriebene Polygone 98

Seite

Fünfzehnter Abschnitt.

Flächen und Körper. — Ebenen. — Krumme Flächen. — Ein Würfel. — Kubikzoll. — Parallelopipede. — Ihre Zerfällung in Würfel. — Numerischer Ausdruck des körperlichen Inhaltes eines Parallelopipedes 107

Sechszehnter Abschnitt.

Zerfällung von Parallelopipeden in Säulen und Schichten. — Senkrechte Körper im Allgemeinen. — Methode, ihren Körper-Inhalt zu bestimmen. — Prismen. — Cylinder. — Vergleichung beider Körper in Bezug auf ihren Körper-Inhalt. — Schnitte durch diese Körper 115

Siebzehnter Abschnitt.

Pyramiden und Kegel. — Vergleichung ihres körperlichen Inhaltes. — Pyramiden und Kegel, verglichen mit Prismen und Cylindern 123

Achtzehnter Abschnitt.

Körperlicher Inhalt von Prismen im Allgemeinen. — Oberflächen von Prismen und Cylindern. — Regelmäßige Pyramiden. — Die Oberflächen und körperlichen Inhalte von Würfeln, und anderen unter einander ähnlichen Körpern nicht der Länge ihrer Kanten proportionirt 131

Neunzehnter Abschnitt.

Kugel. — Erzeugt durch die Drehung eines Kreises. — Schnitt einer Kugel. — Einer Kugel umschriebener Cylinder. — Verhältniß ihrer Größe. — Oberfläche der Kugel, verglichen mit der des Cylinders. — Mit dem Flächen-Inhalte eines größten

Seite

Kreises der Kugel. — Bestimmung des körperlichen Inhaltes einer Kugel. — Oberflächen und Körper-Inhalte verschiedener Kugeln, nicht ihren Durchmessern proportional 138

Zwanzigster Abschnitt.

Axen und Pole eines größten Kreises der Kugel. — Wie ein größter Kreis die Kugel, und wie zwei größte Kreise sich unter einander theilen. — Neigung der Ebenen zweier größter Kreise derselben Kugel. — Sie kann auf dreierlei Art gemessen werden. — Größte Kreise, die durch die Pole eines anderen größten Kreises gehen 150

Bayerische Staatsbibliothek München

Fig. 1.

Fig. 2.

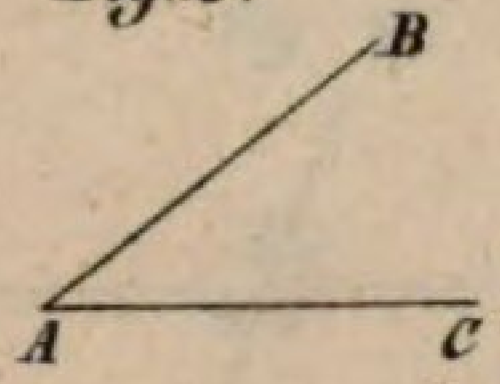


Fig. 3.

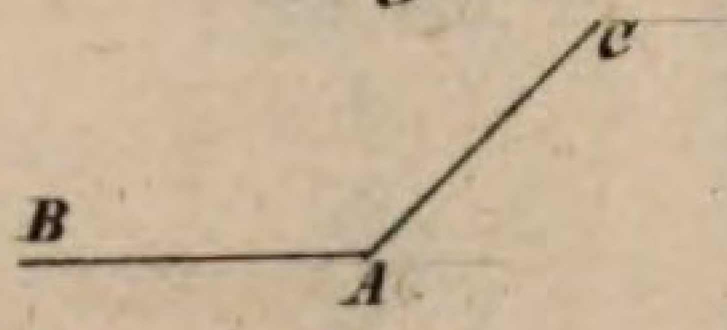


Fig. 4.

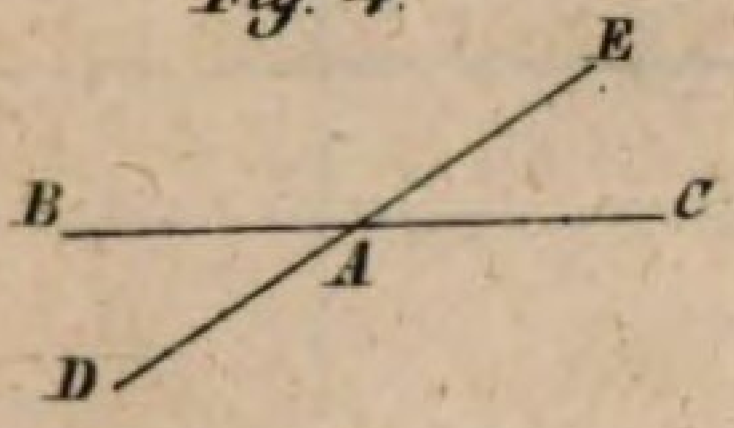


Fig. 5.

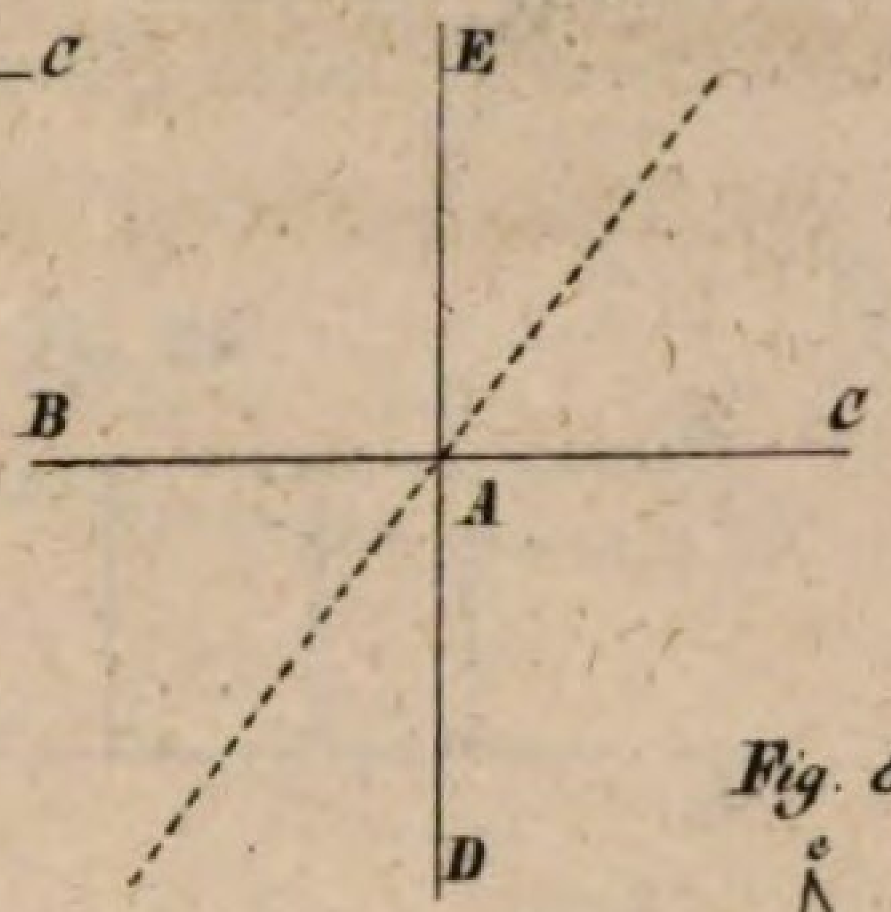


Fig. 6.

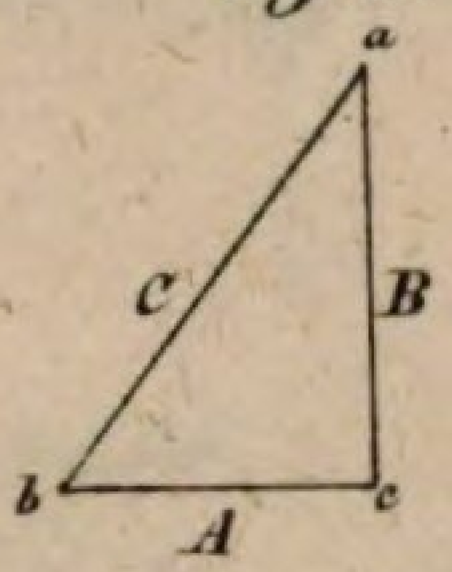


Fig. 7.

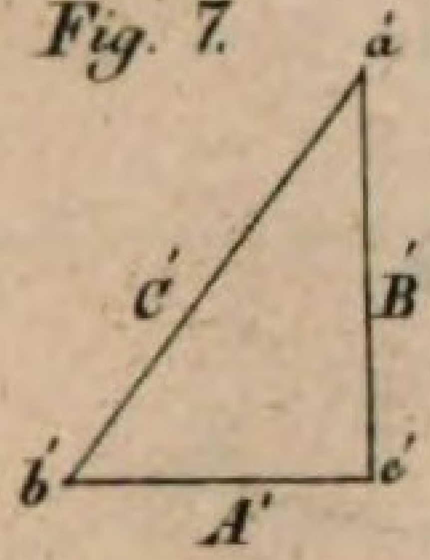


Fig. 8.

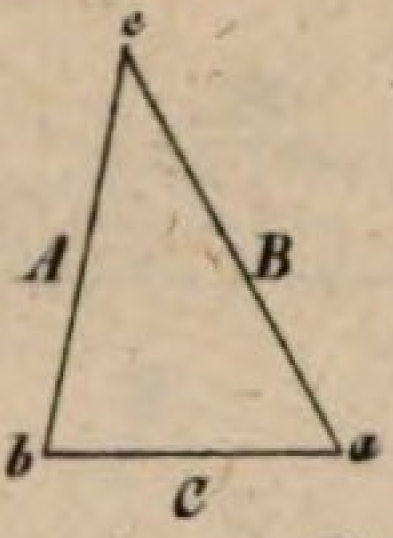


Fig. 9.

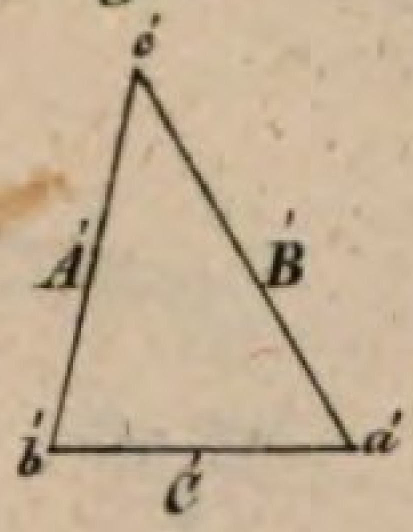


Fig. 10.

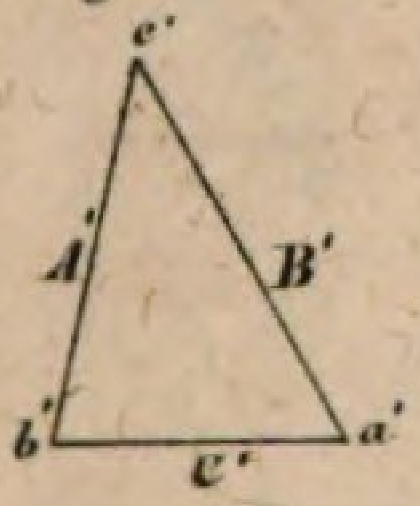


Fig. 11.

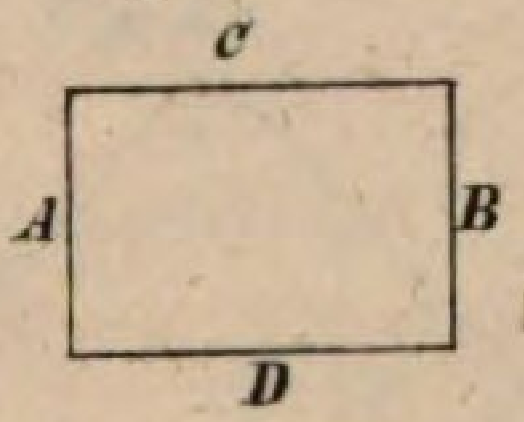


Fig. 12.

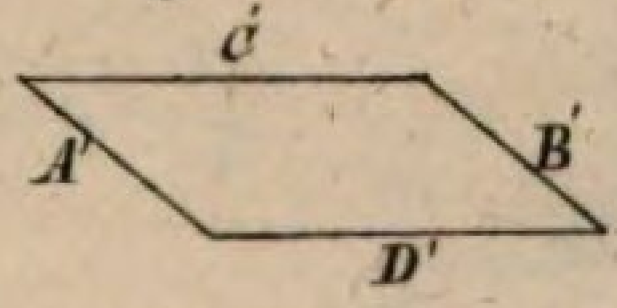


Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

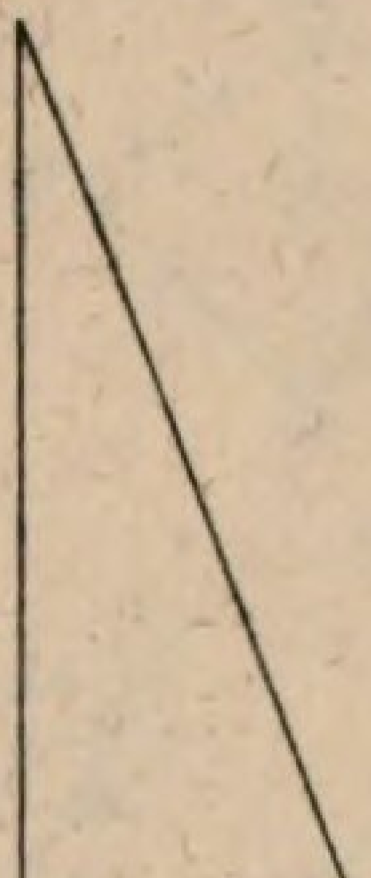


Fig. 16.

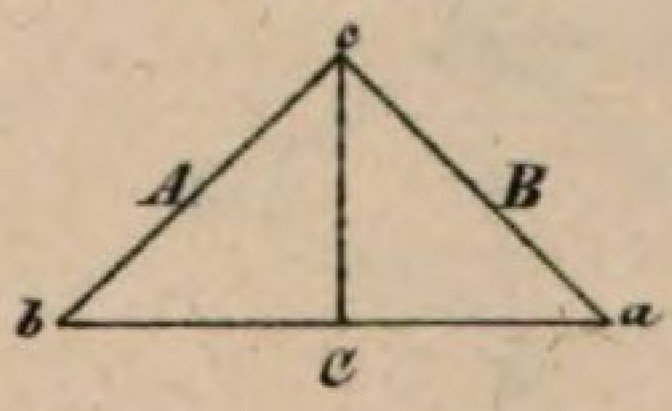


Fig. 17.

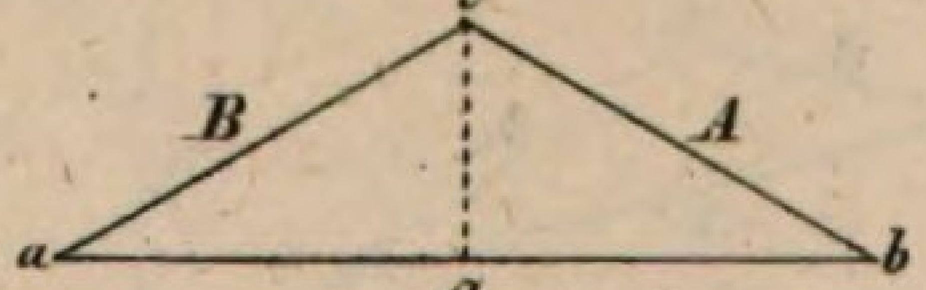


Fig. 18.

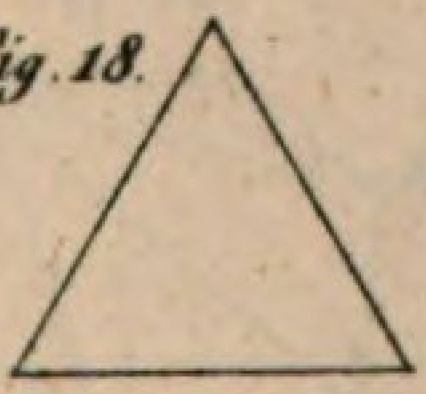


Fig. 19.

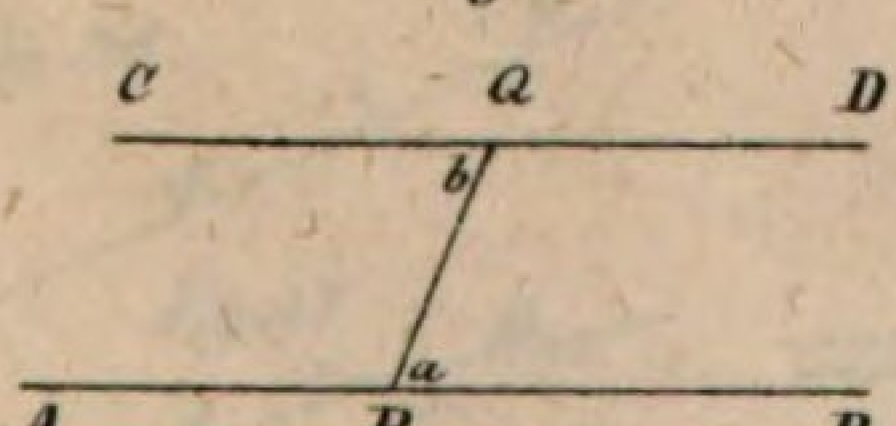
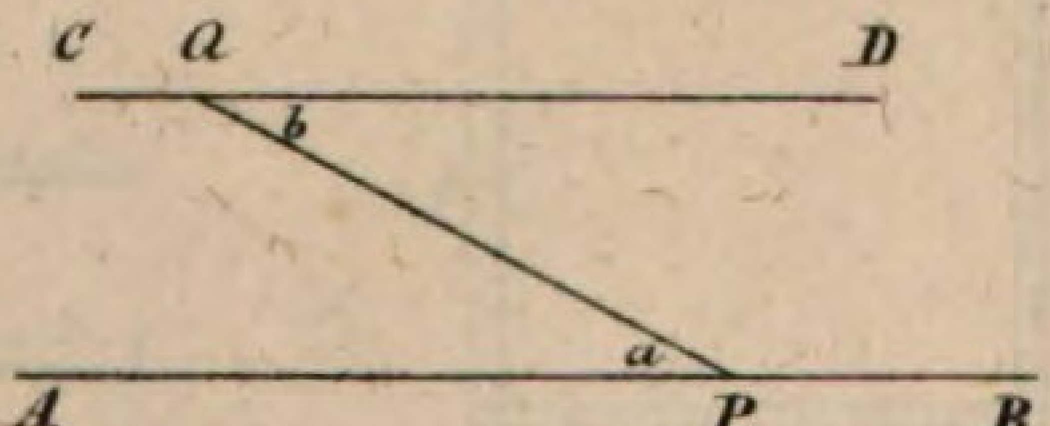


Fig. 20.



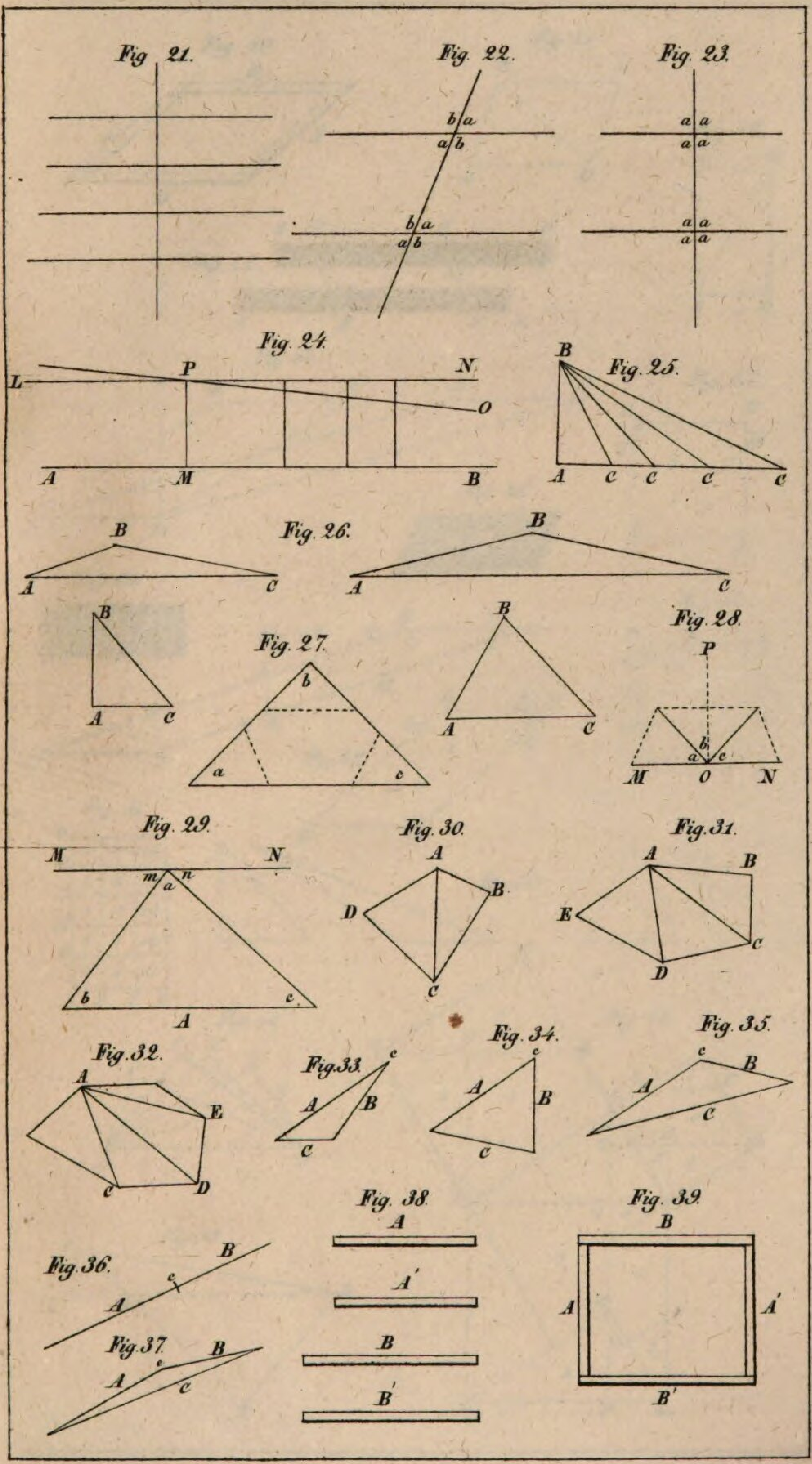


Fig. 21.
Fig. 22.
b a
a b
b a
a b
Fig. 23.
a a
a a
a a
a a
Fig. 24.
L P N O
A M B
Fig. 25.
B
A C C C C
Fig. 26.
B
A C
B
A C
Fig. 27.
B
A C
b
a c
B
A C
Fig. 28.
P
b
a c
M O N
Fig. 29.
M N
m n
a
b c
A
Fig. 30.
A B D C
Fig. 31.
A B E C D
Fig. 32.
A E C D
Fig. 33.
c A B C
Fig. 34.
c A B C
Fig. 35.
c B A C
Fig. 36.
B c A
Fig. 37.
B c A C
Fig. 38.
A
A′
B
B′
Fig. 39.
B
A A′
B′

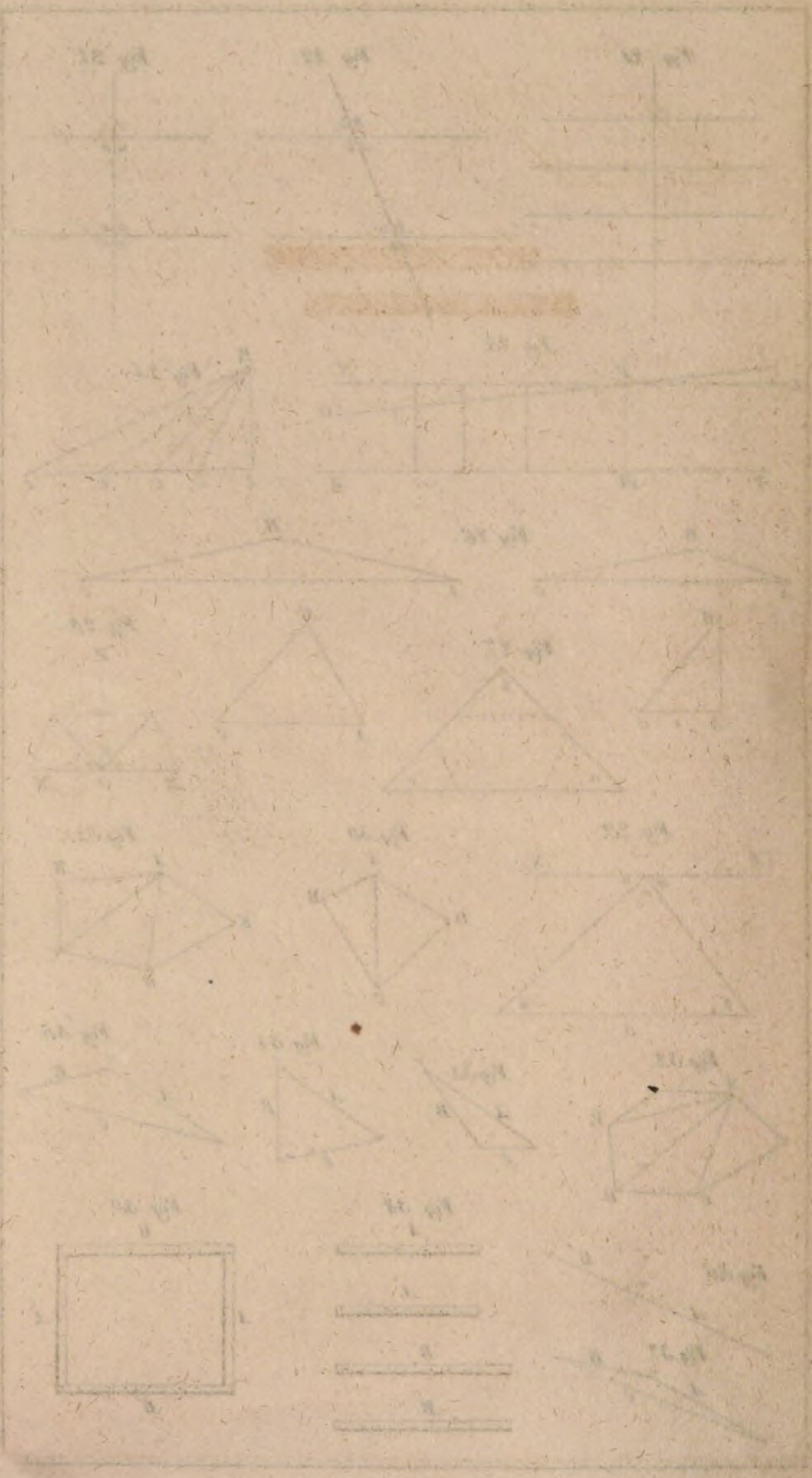


Fig. 40.

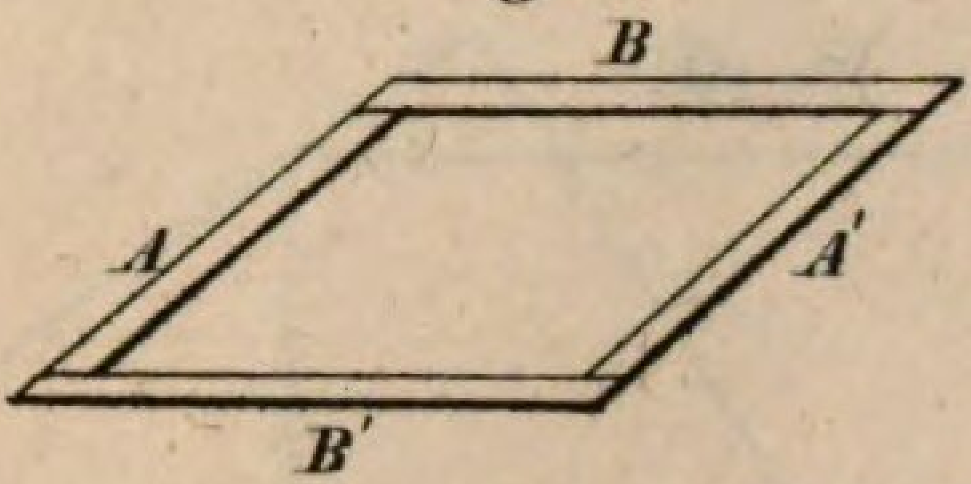


Fig 41.

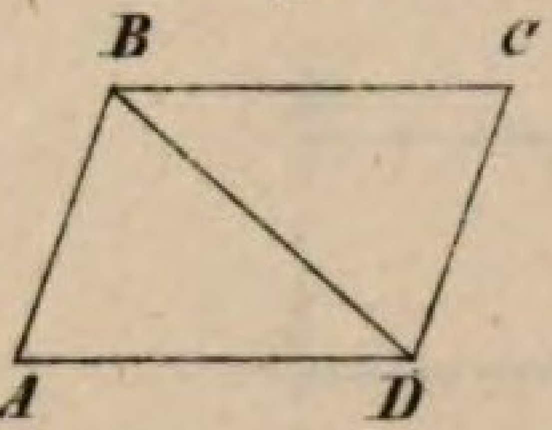


Fig. 43.

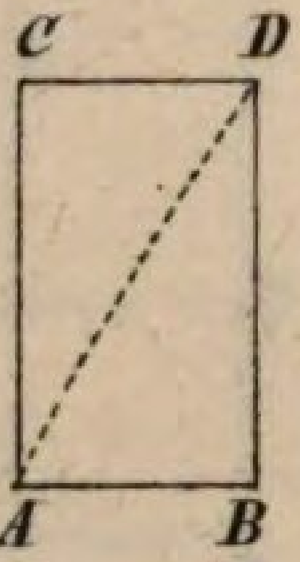


Fig. 42.

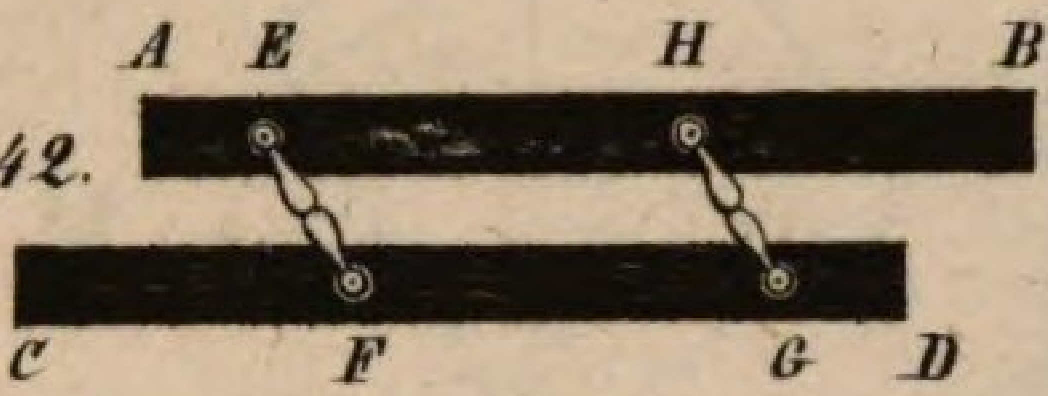


Fig. 44.

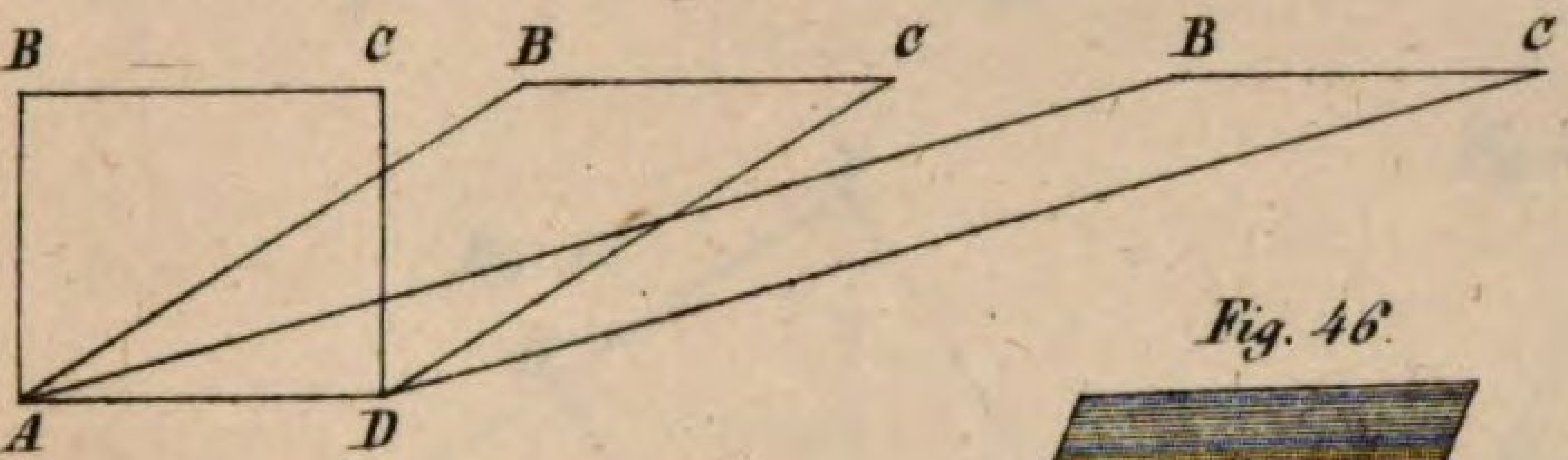


Fig. 47.

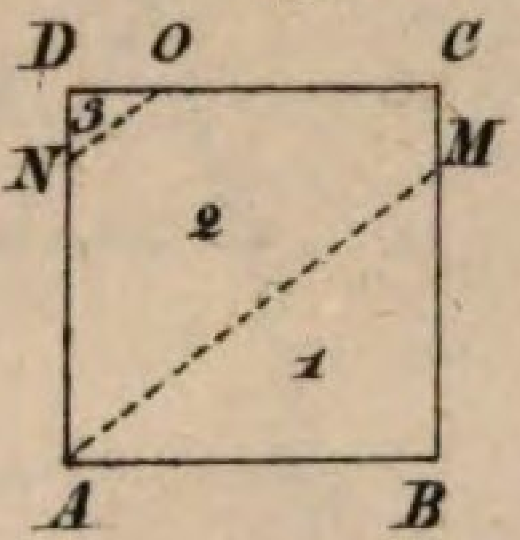


Fig. 46.

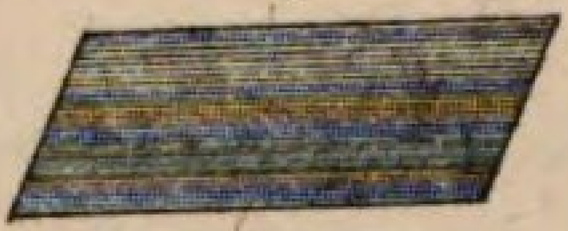


Fig. 45.

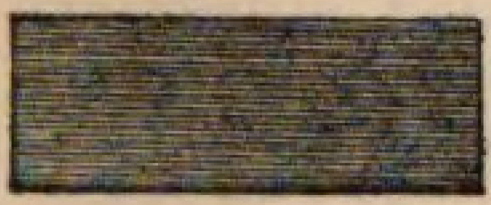


Fig. 49.

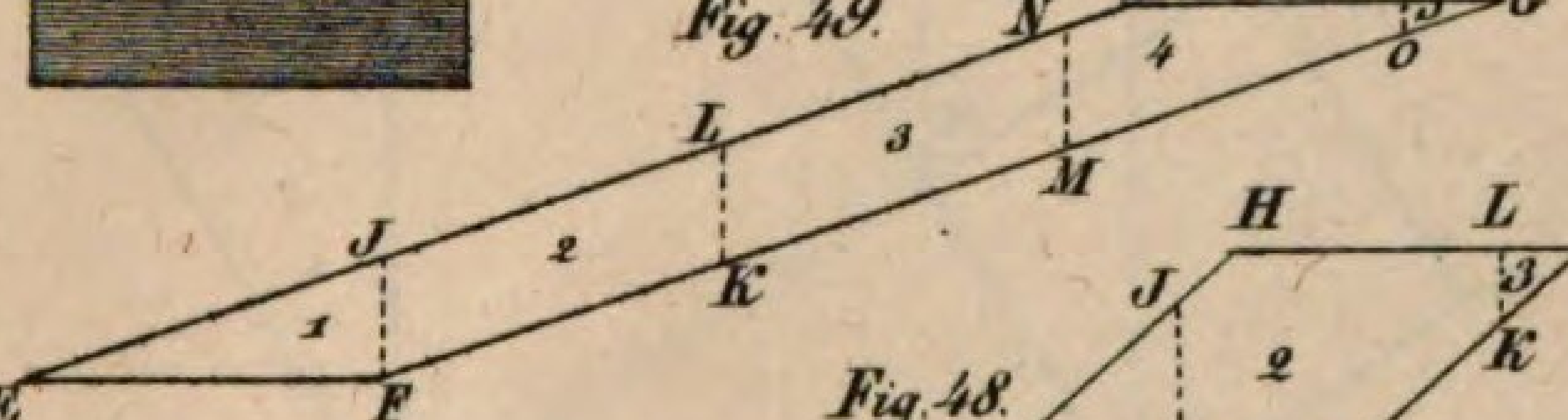


Fig. 50.

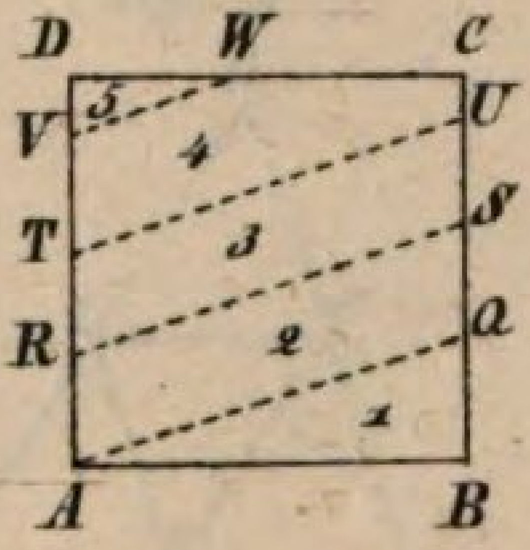


Fig. 48.

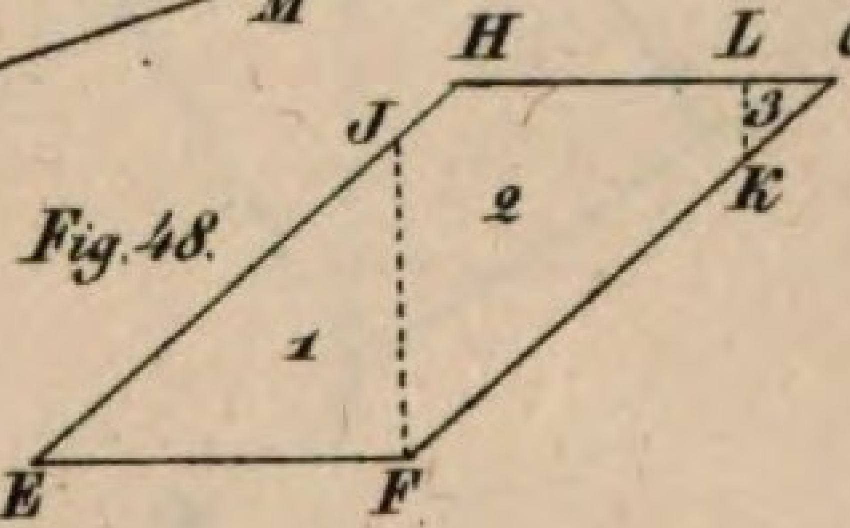


Fig. 51.

Fig. 52

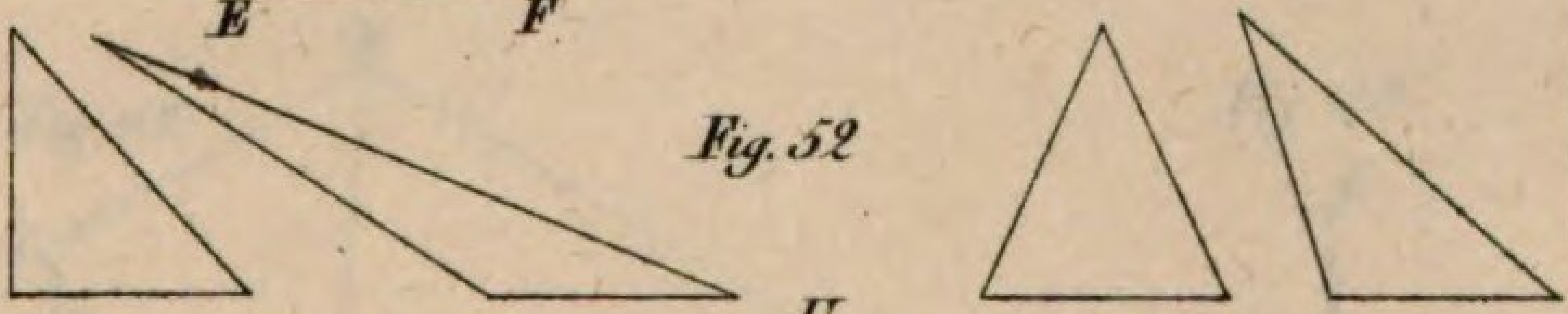


Fig. 54.

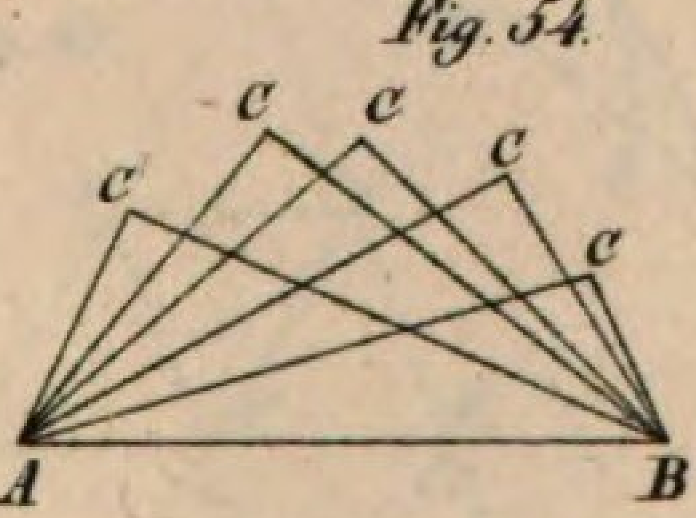


Fig. 55.

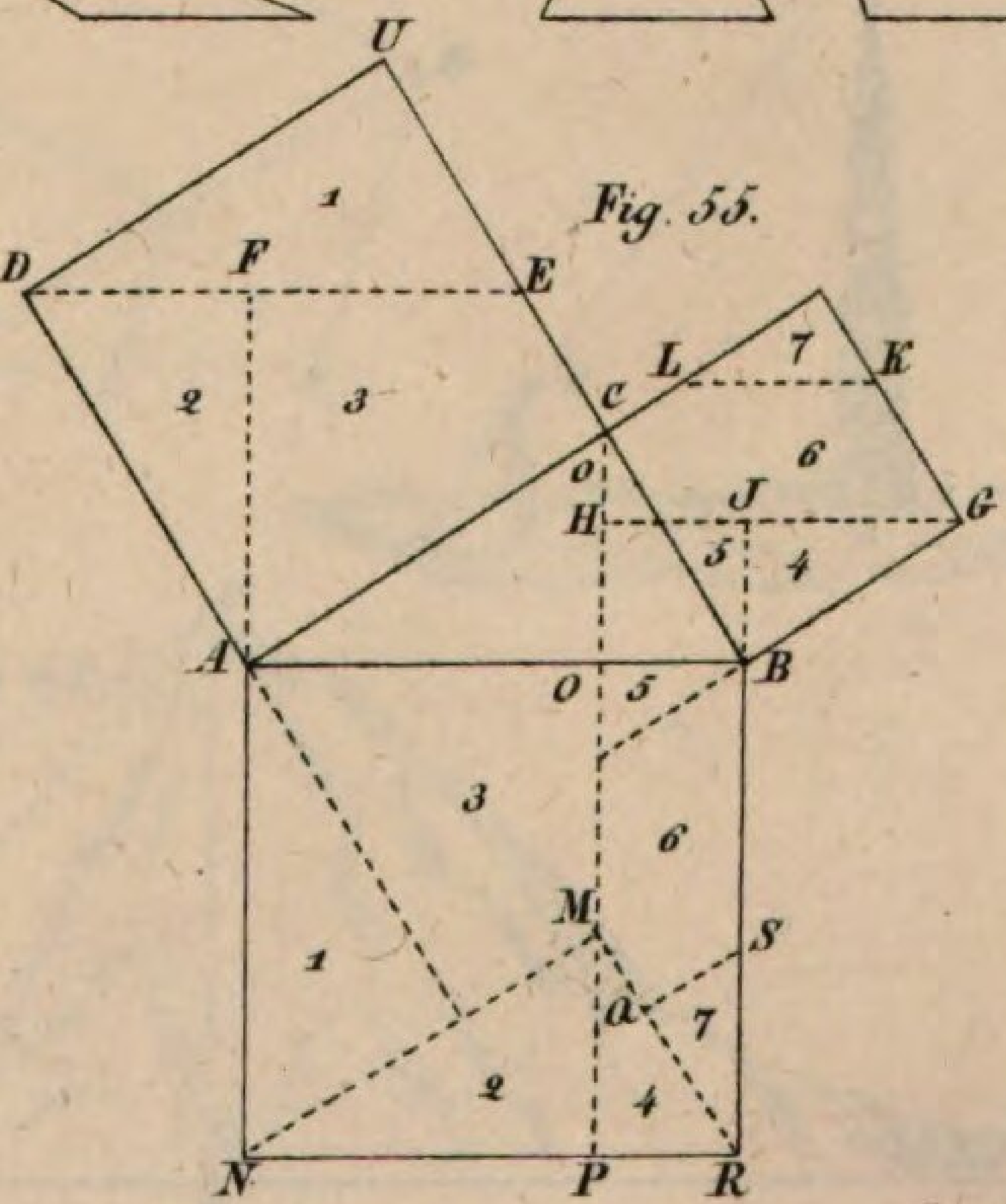
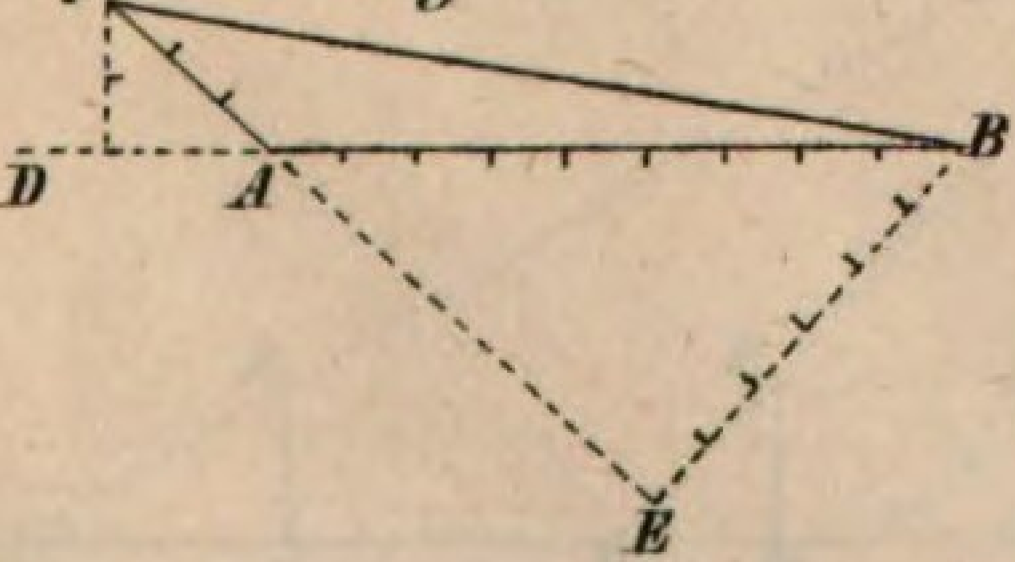


Fig. 53.



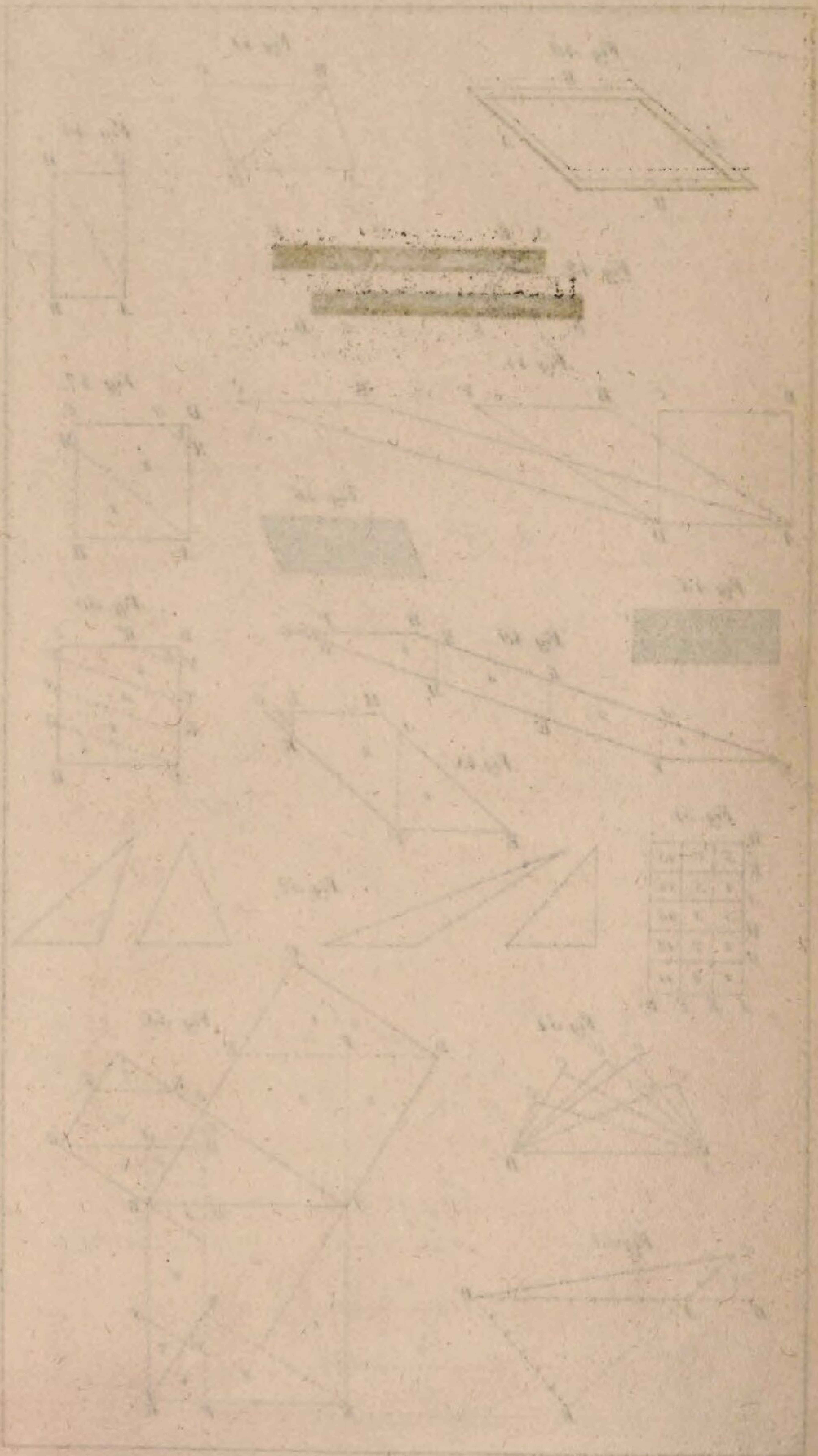


Fig. 56.

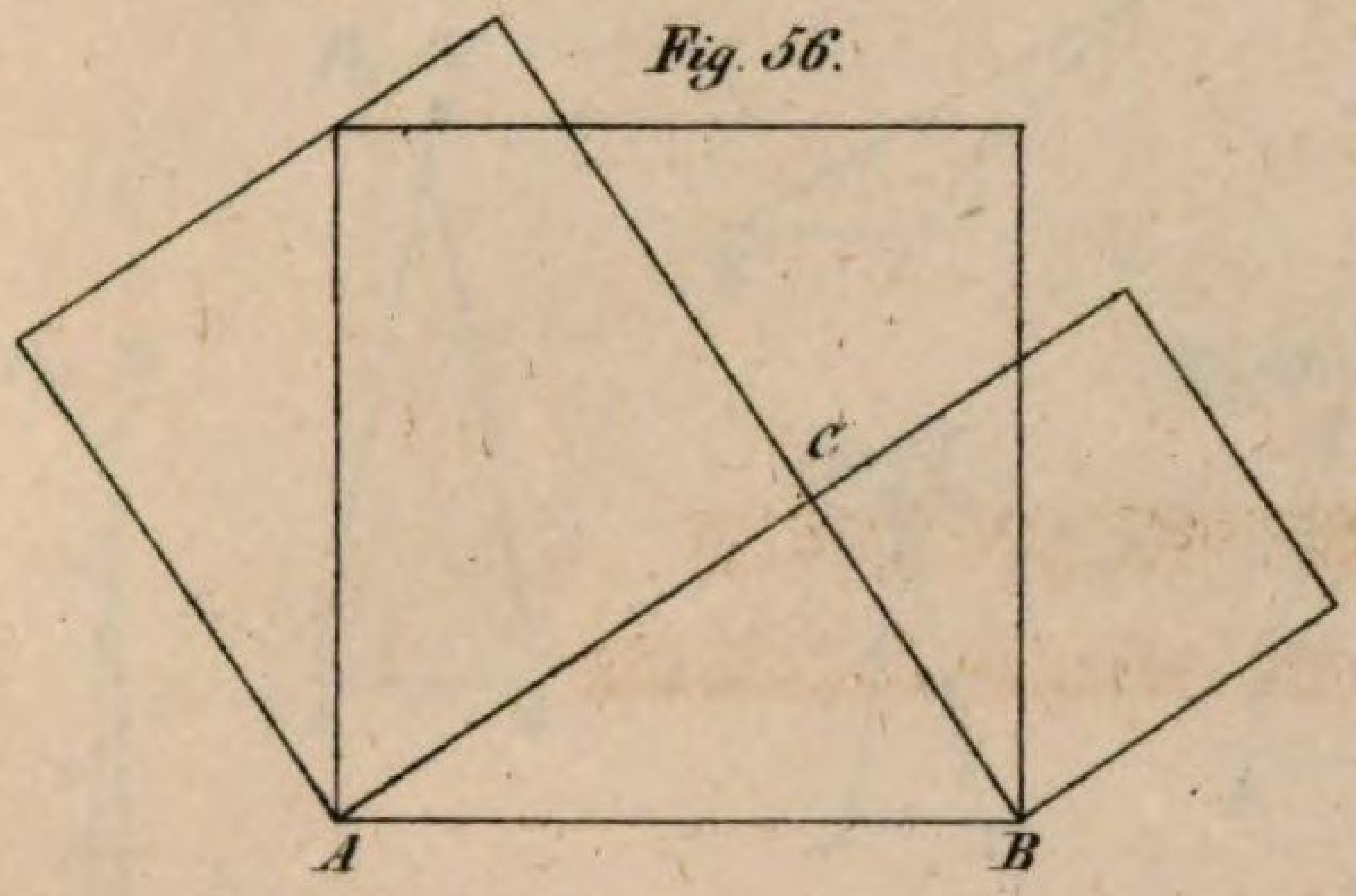


Fig. 58.

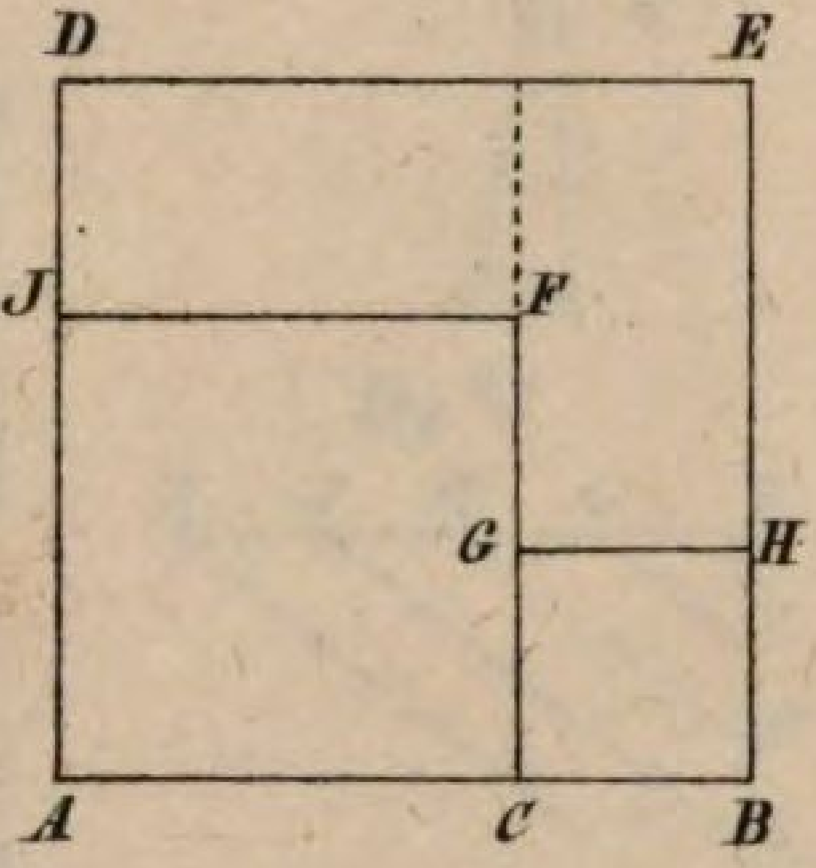


Fig. 57.

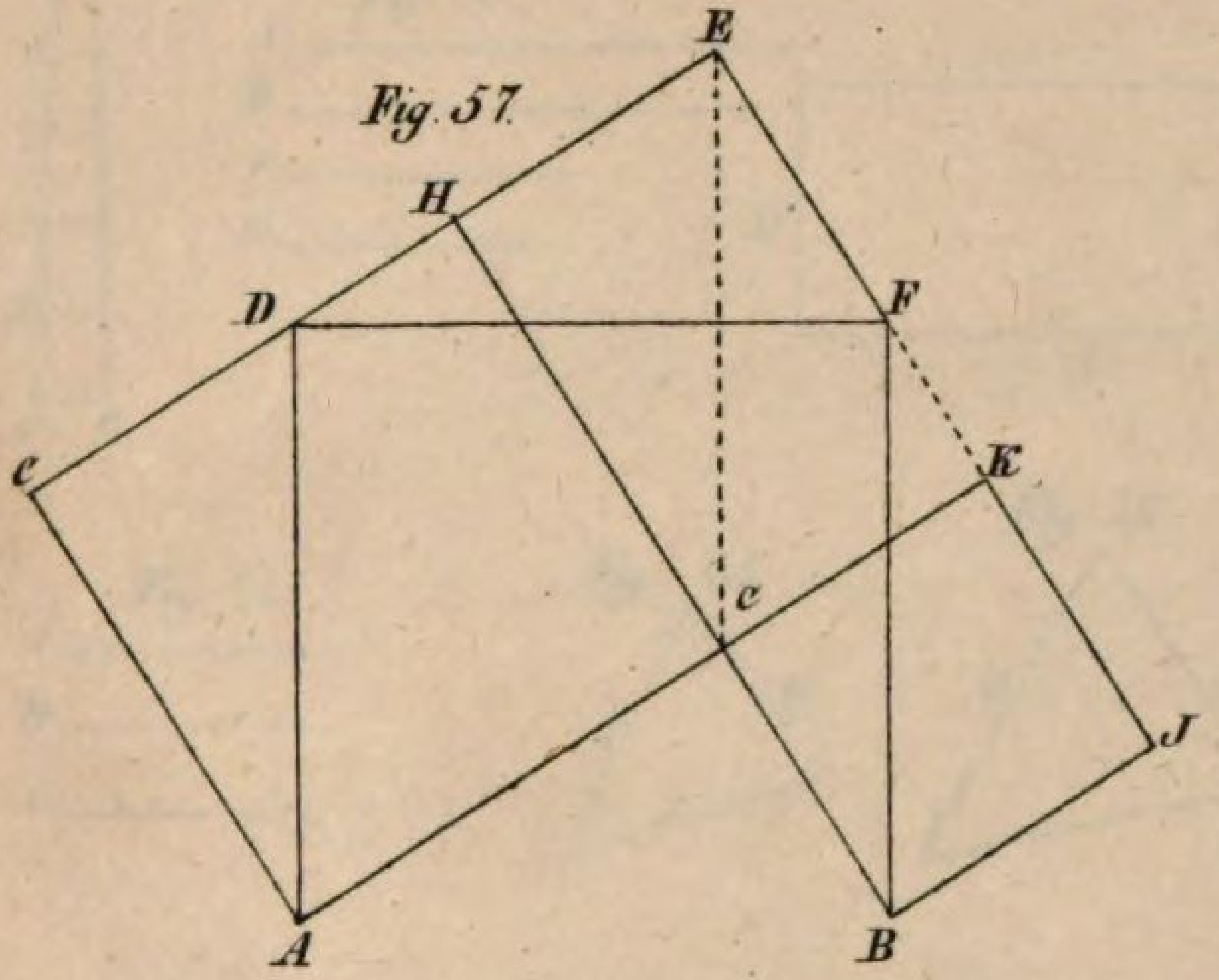


Fig. 59.

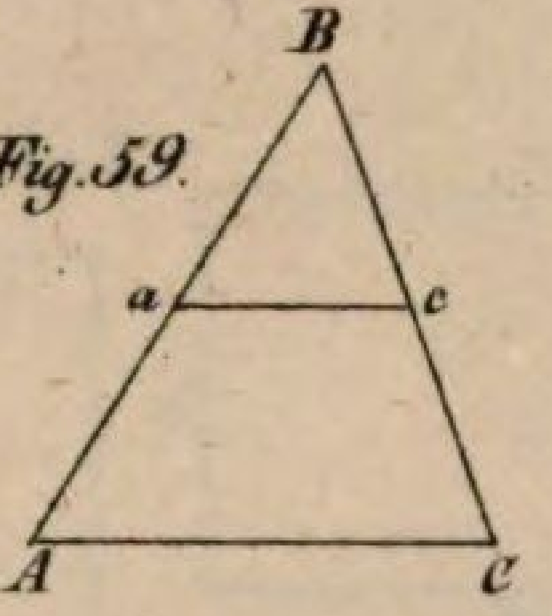


Fig. 60.

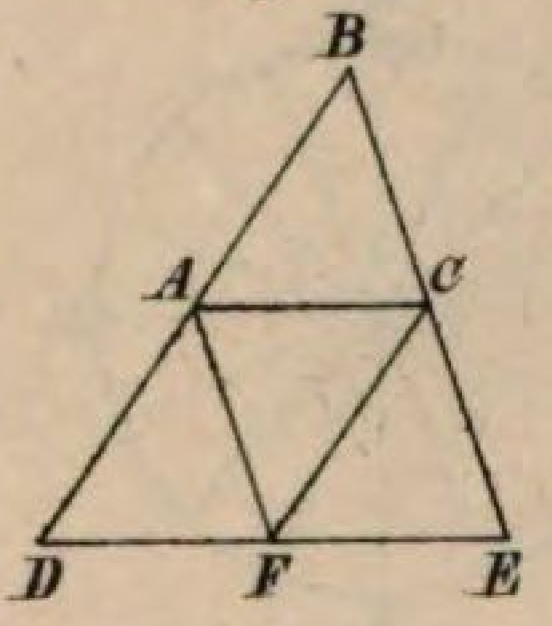


Fig. 62.

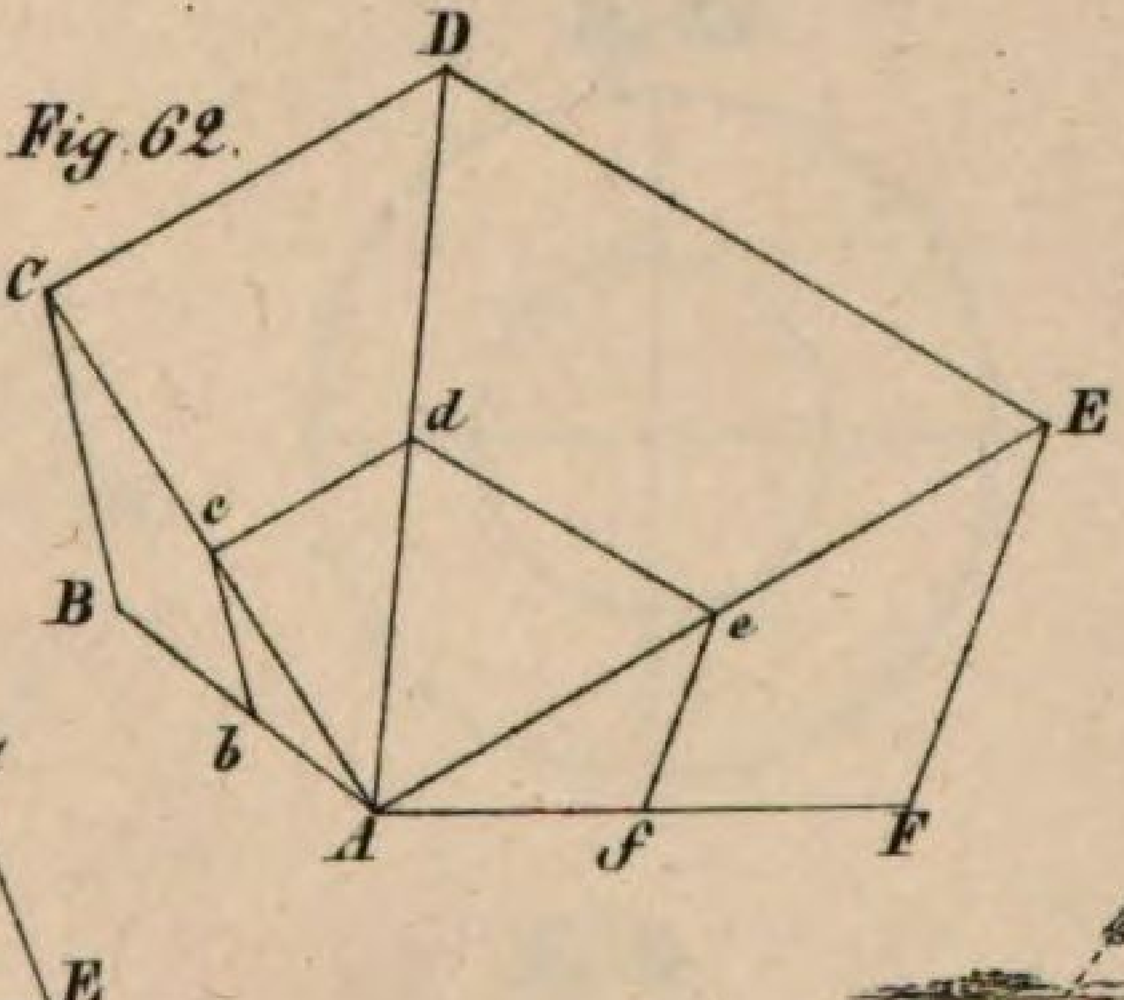


Fig. 63.

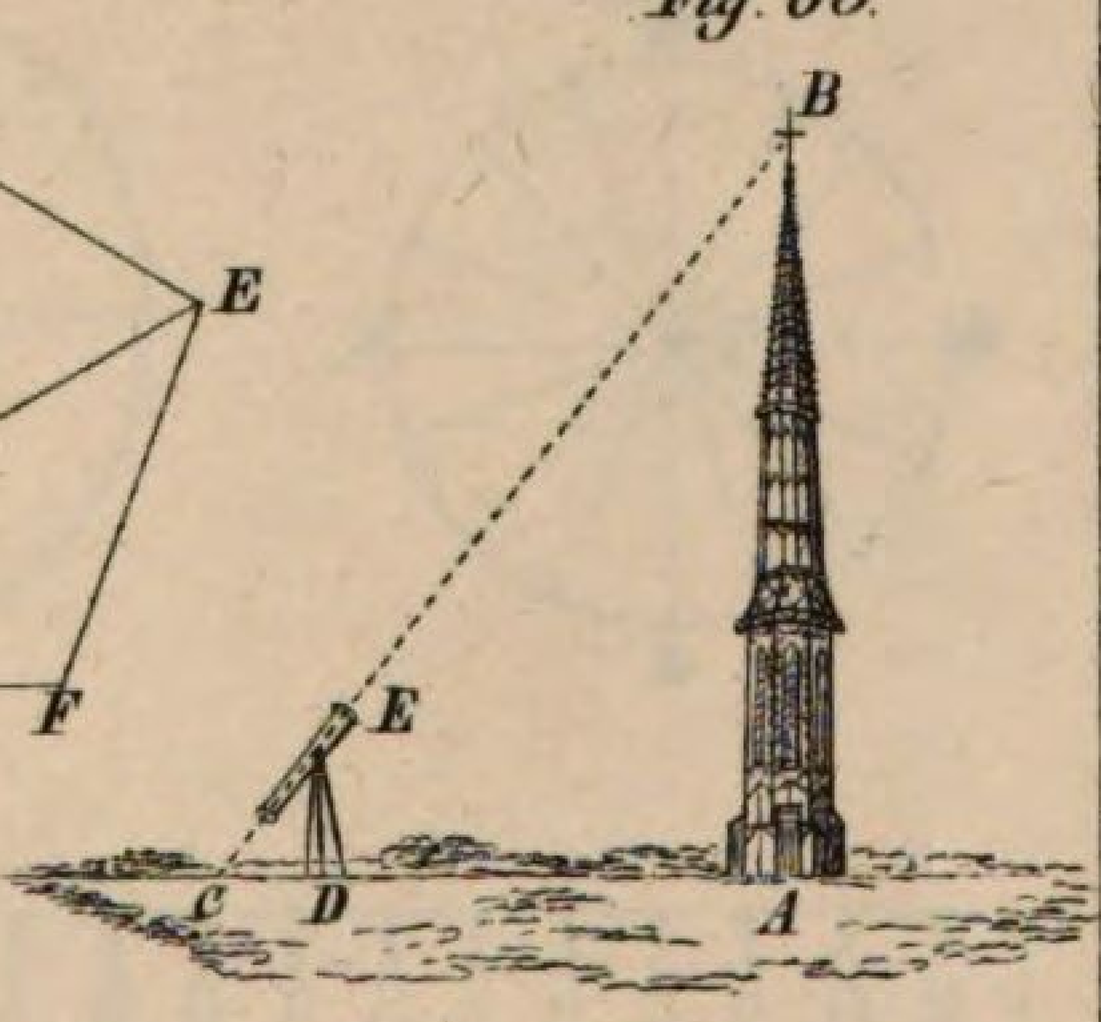


Fig. 61.

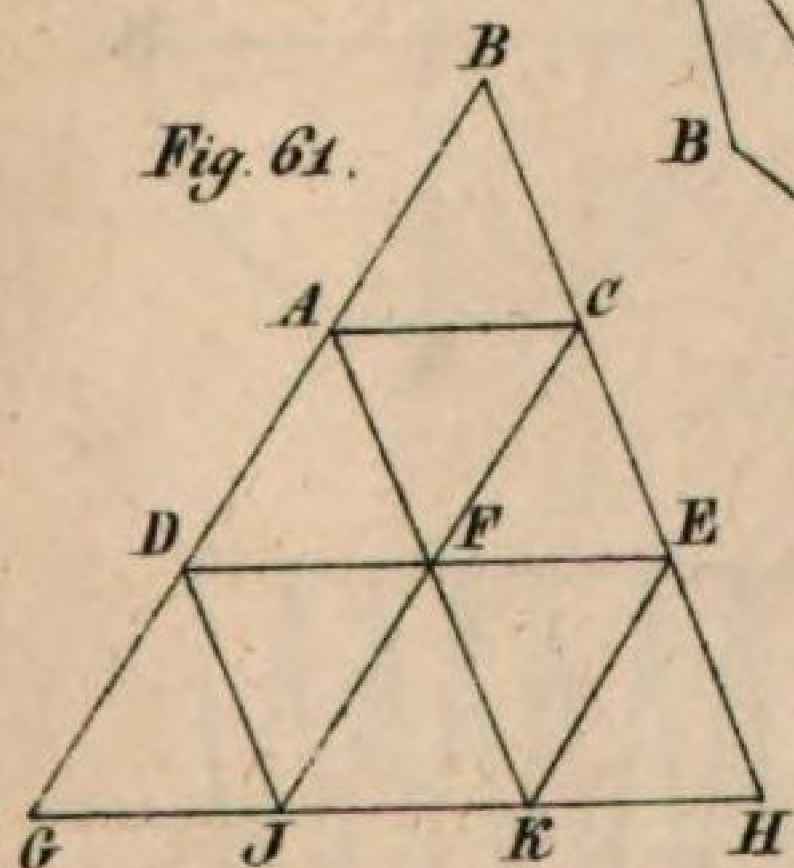
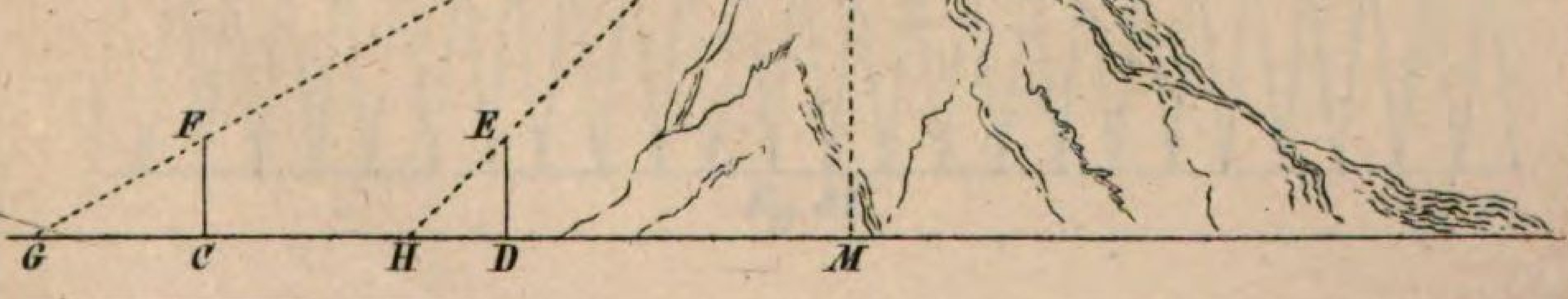


Fig. 64.



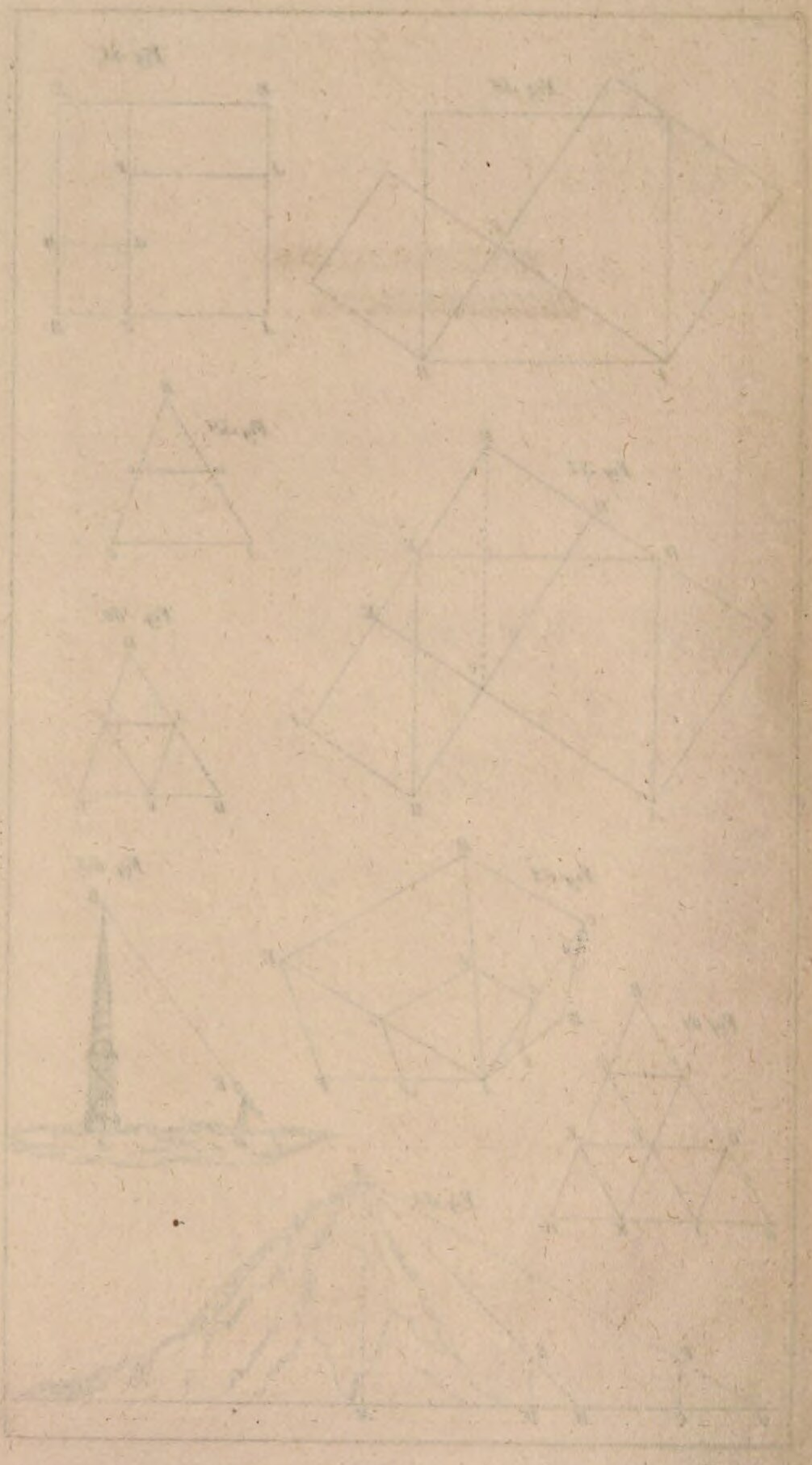


Fig. 65.

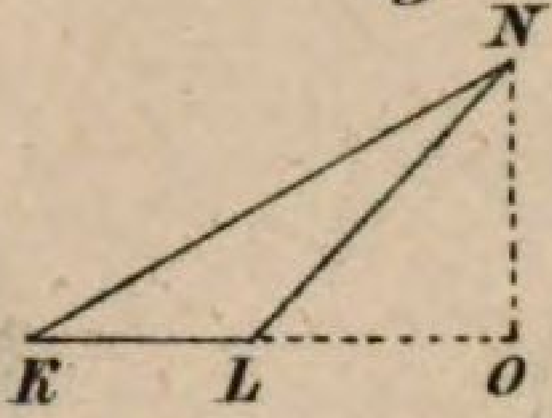


Fig. 69.

Fig. 66.

Fig. 68.

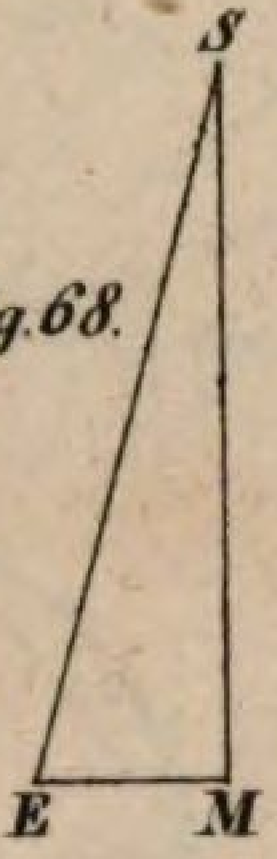


Fig. 71.

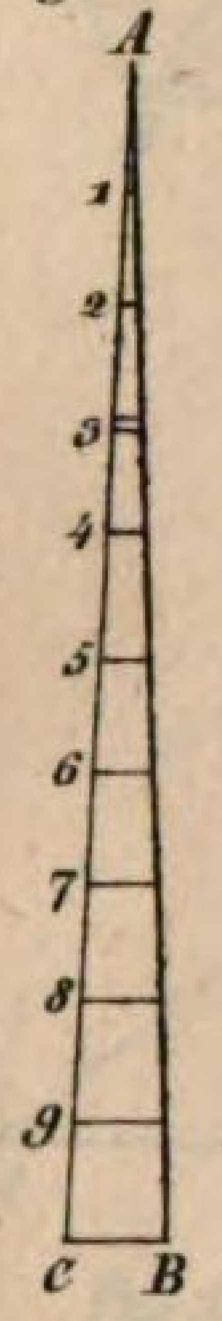


Fig. 67.

Fig. 70.

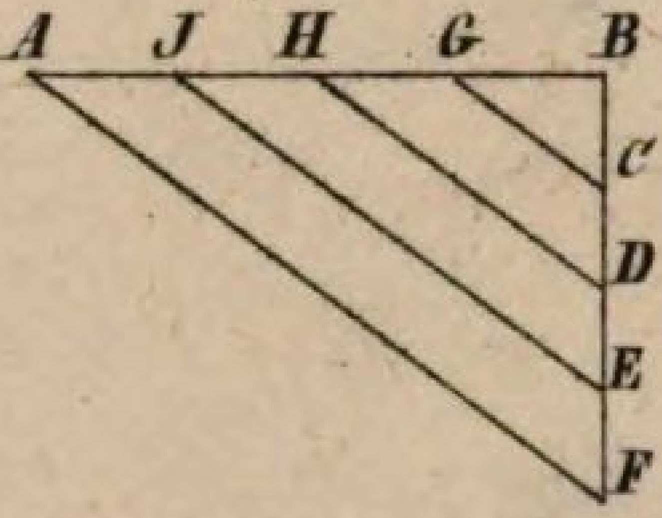


Fig. 72.

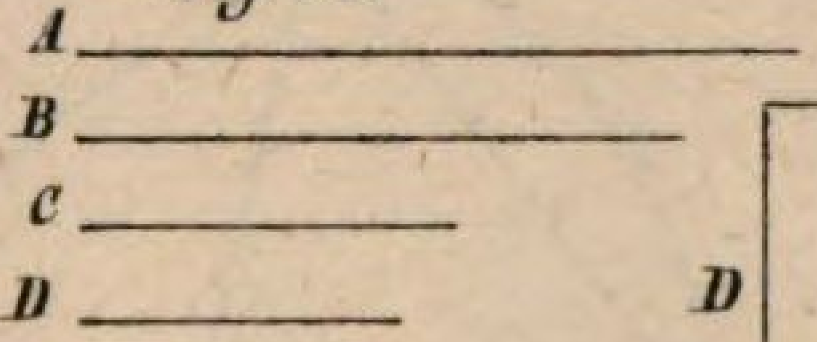


Fig. 73.

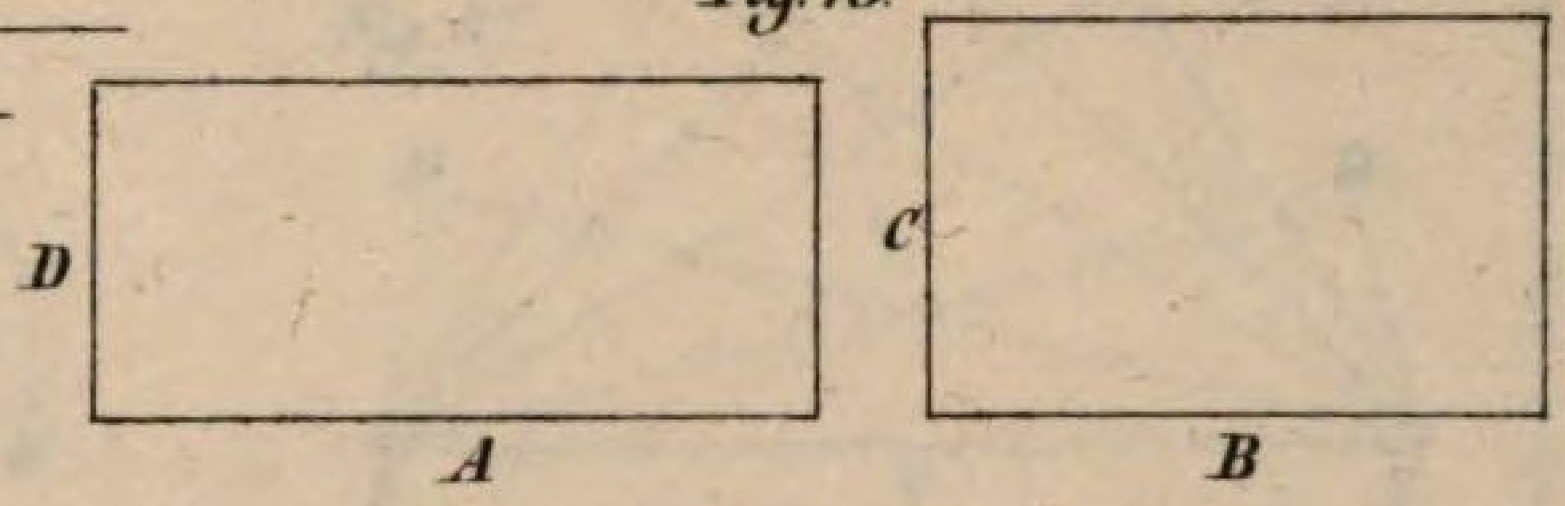


Fig. 74.

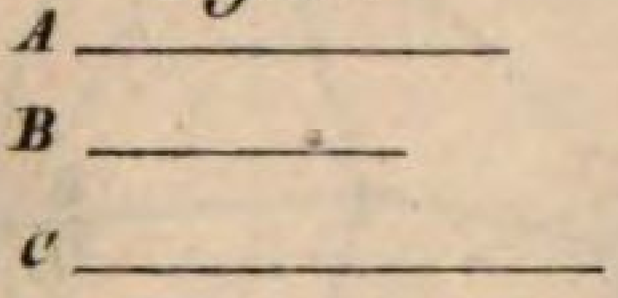


Fig. 75.

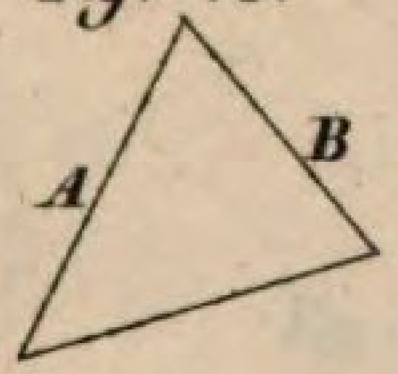


Fig. 76.

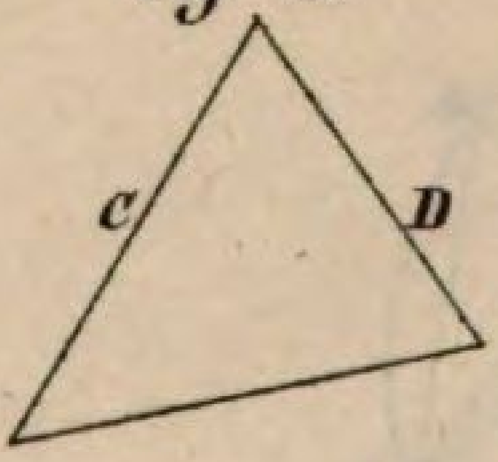


Fig. 77.

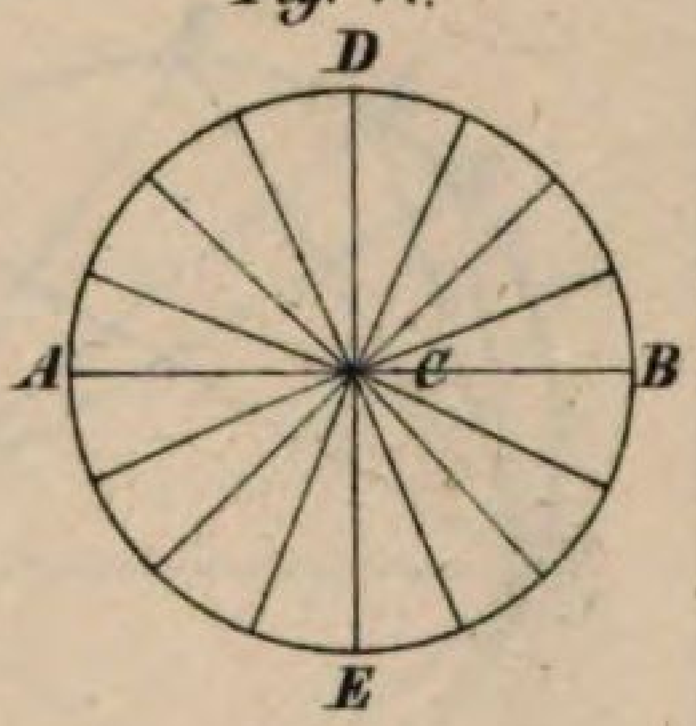


Fig. 78.

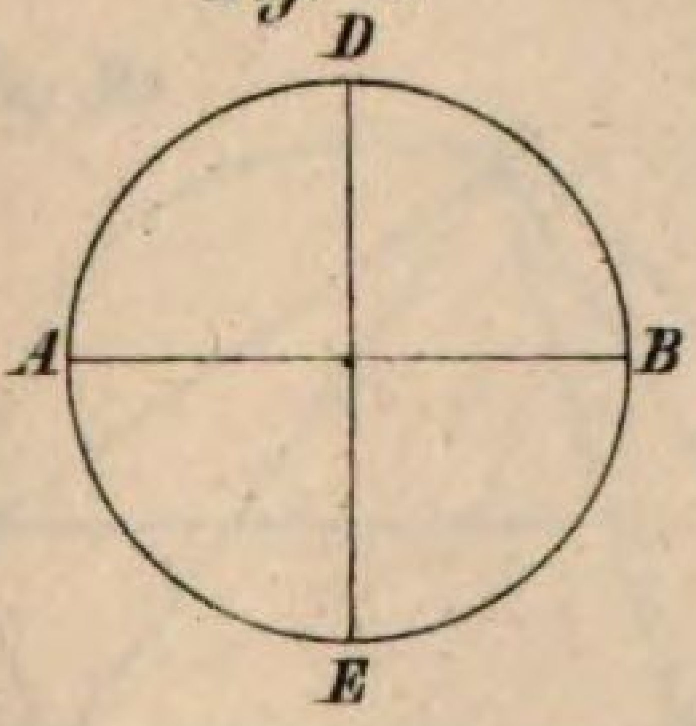


Fig. 79.

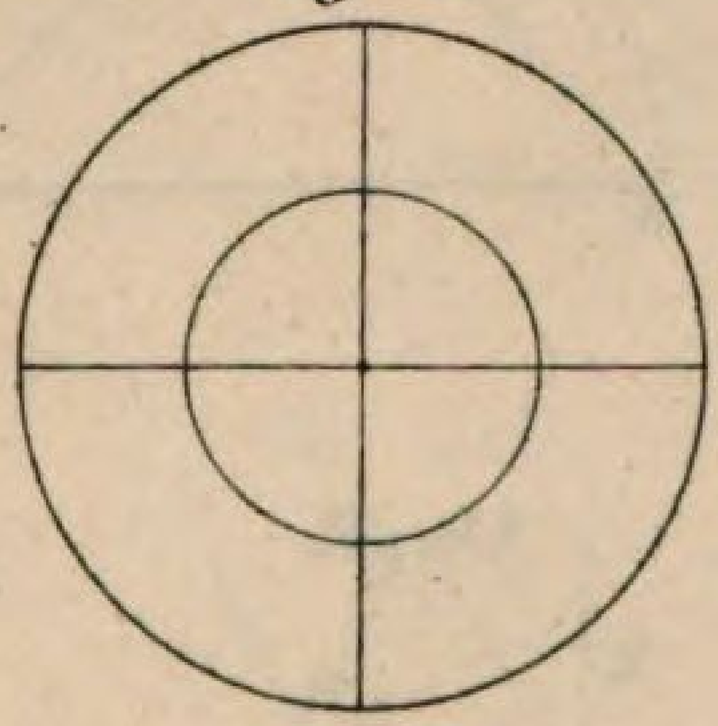


Fig. 80.

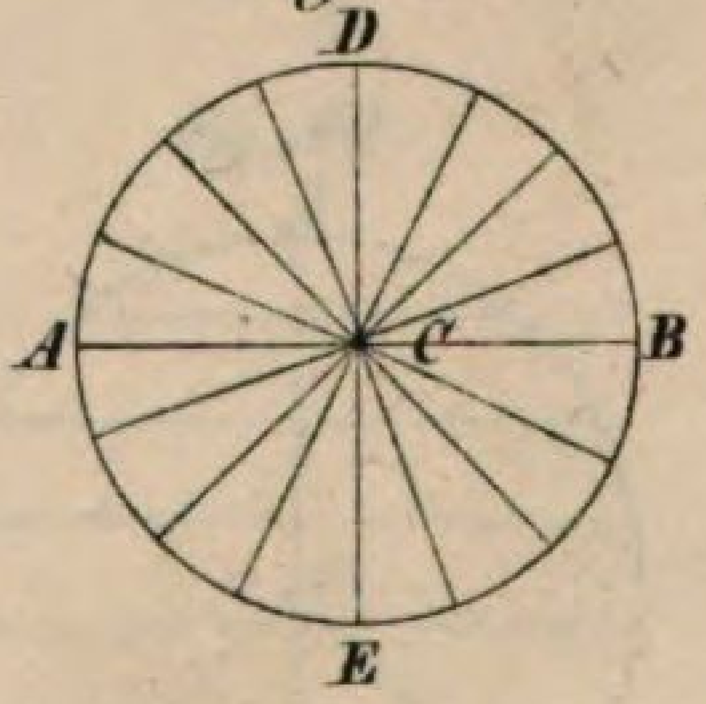
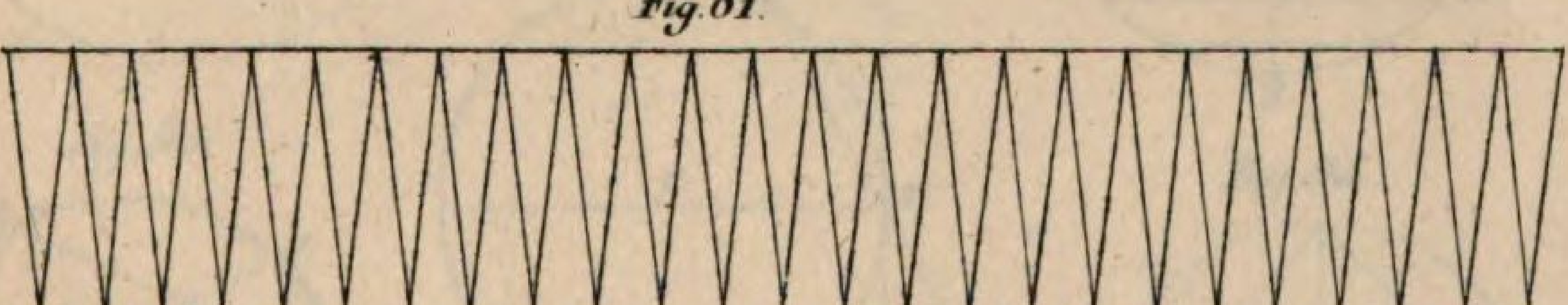


Fig. 81.



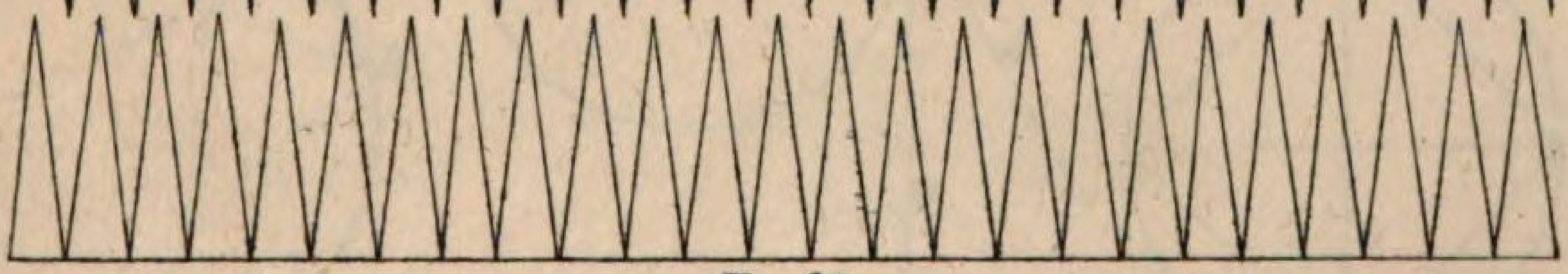


Fig. 82.

Fig. 83.

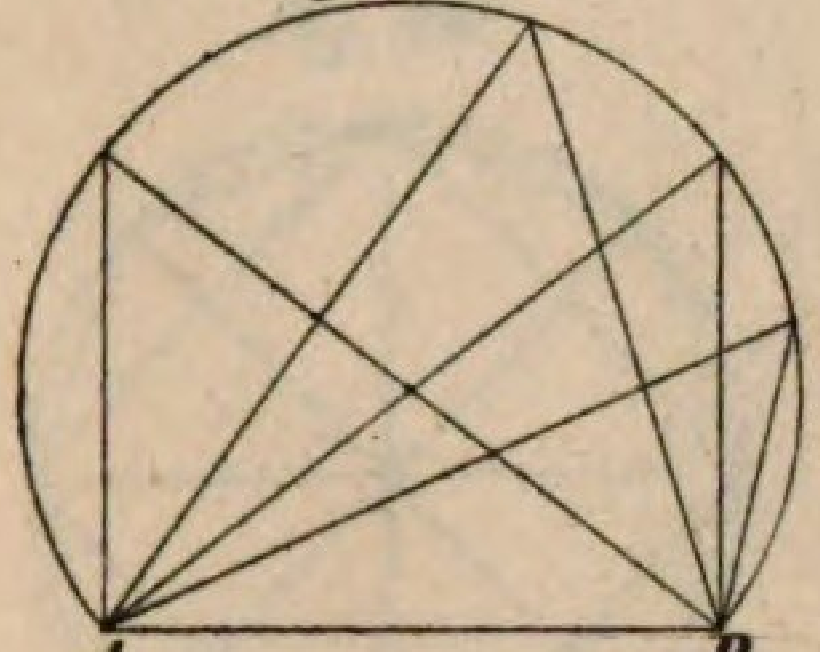


Fig. 85.

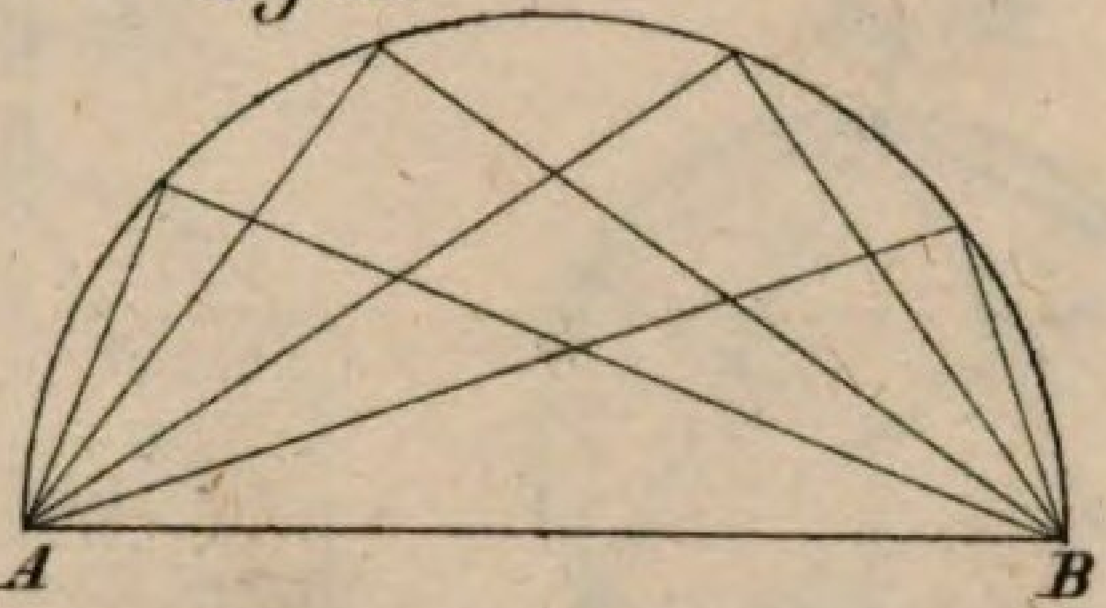


Fig. 84.

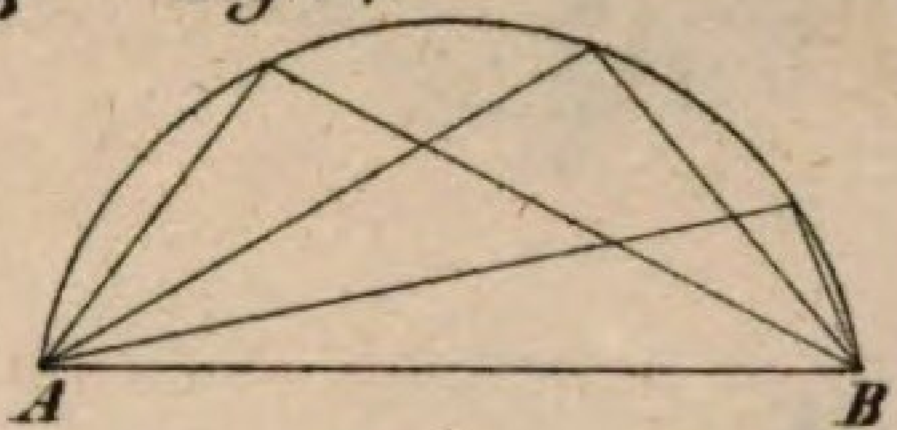


Fig. 86.

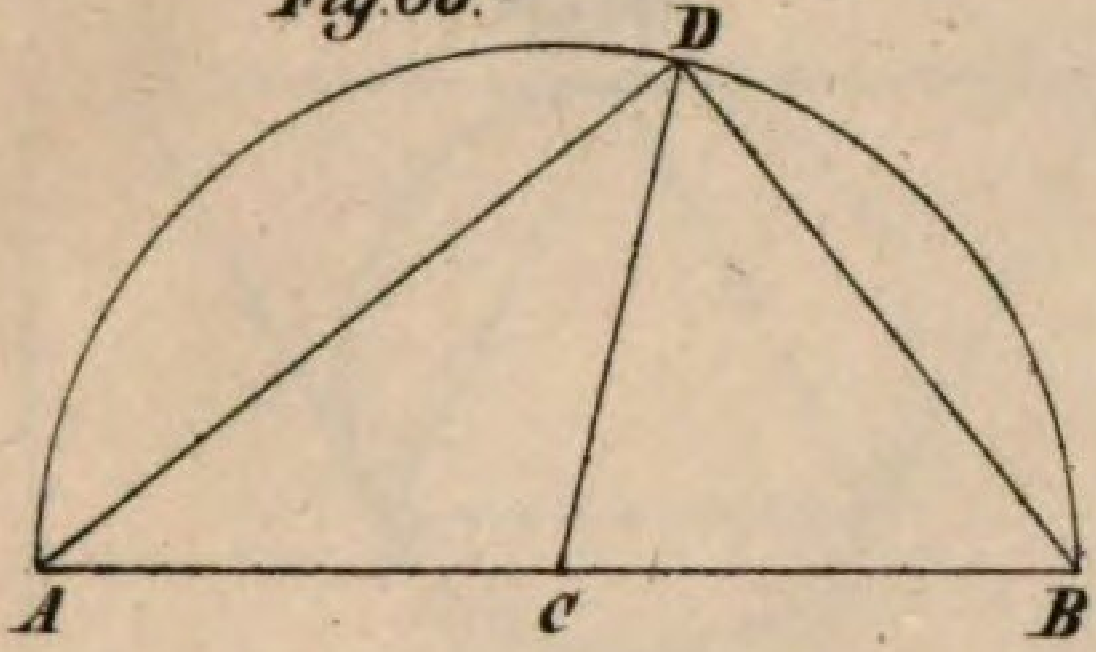


Fig. 87.

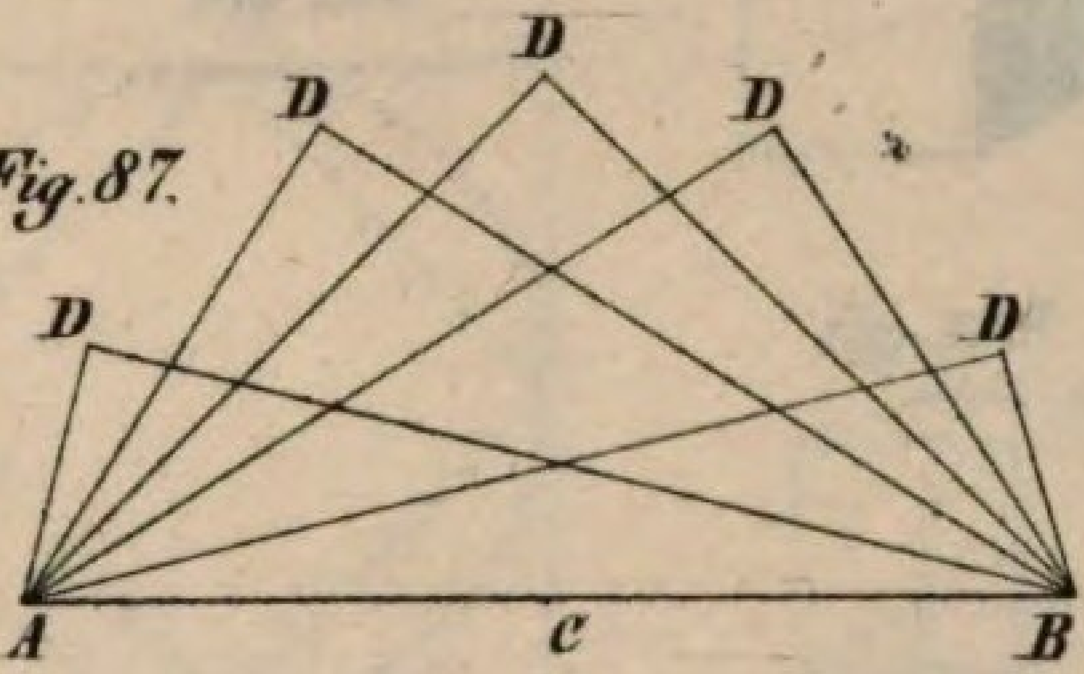


Fig. 88.

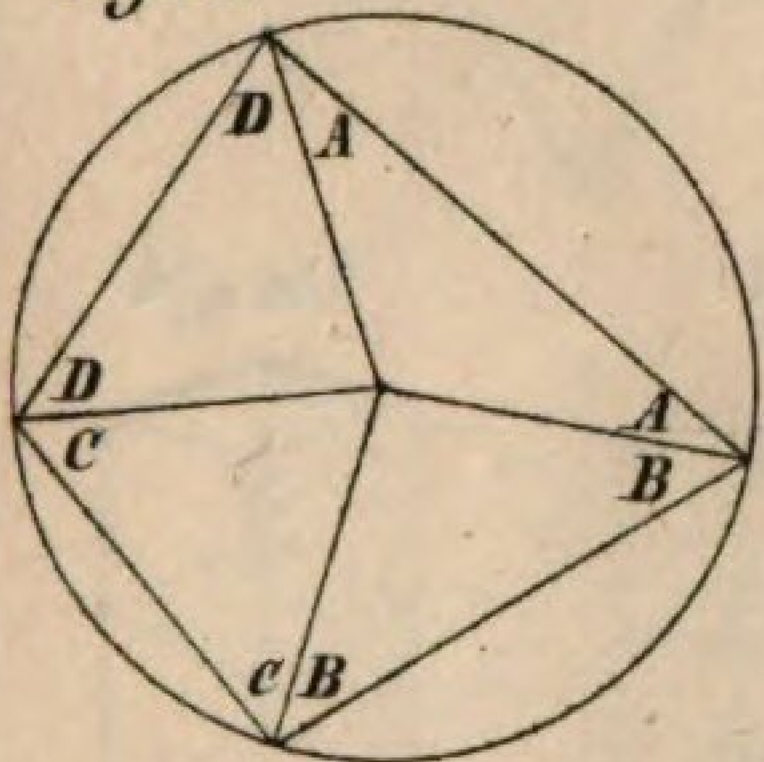


Fig. 89.

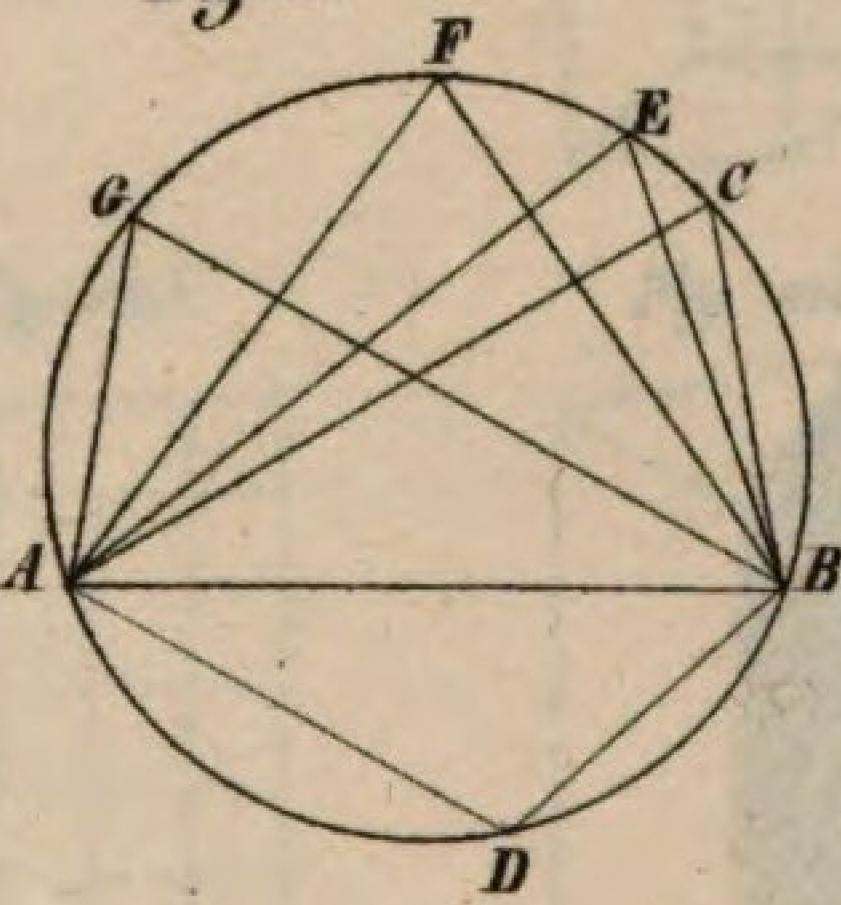


Fig. 91.

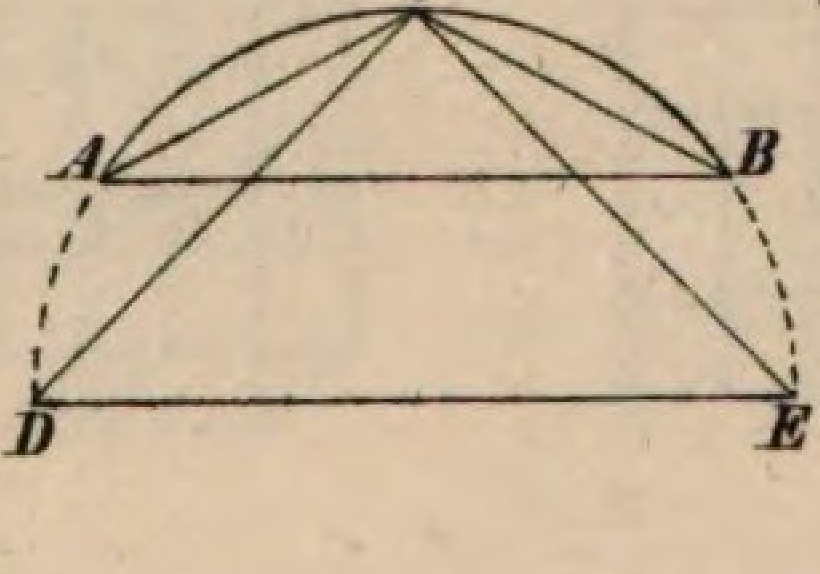


Fig. 90.

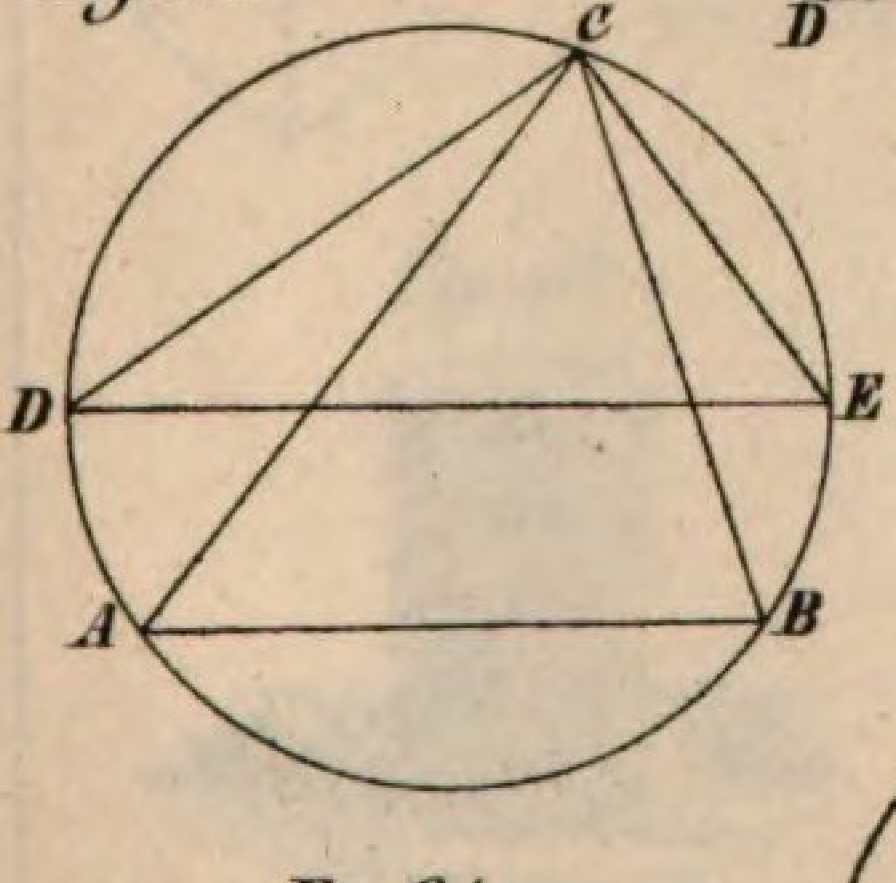


Fig. 92.

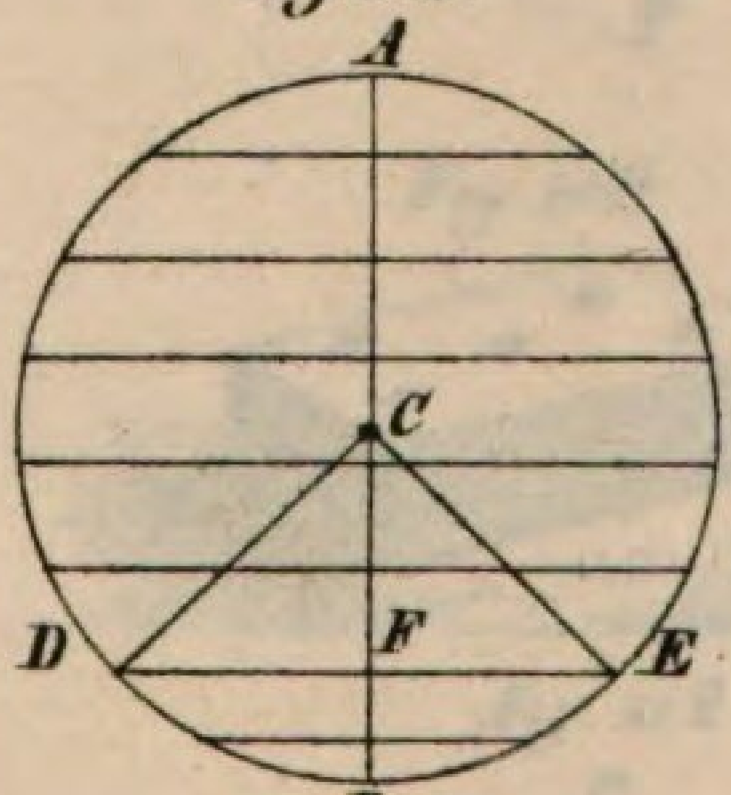


Fig. 93.

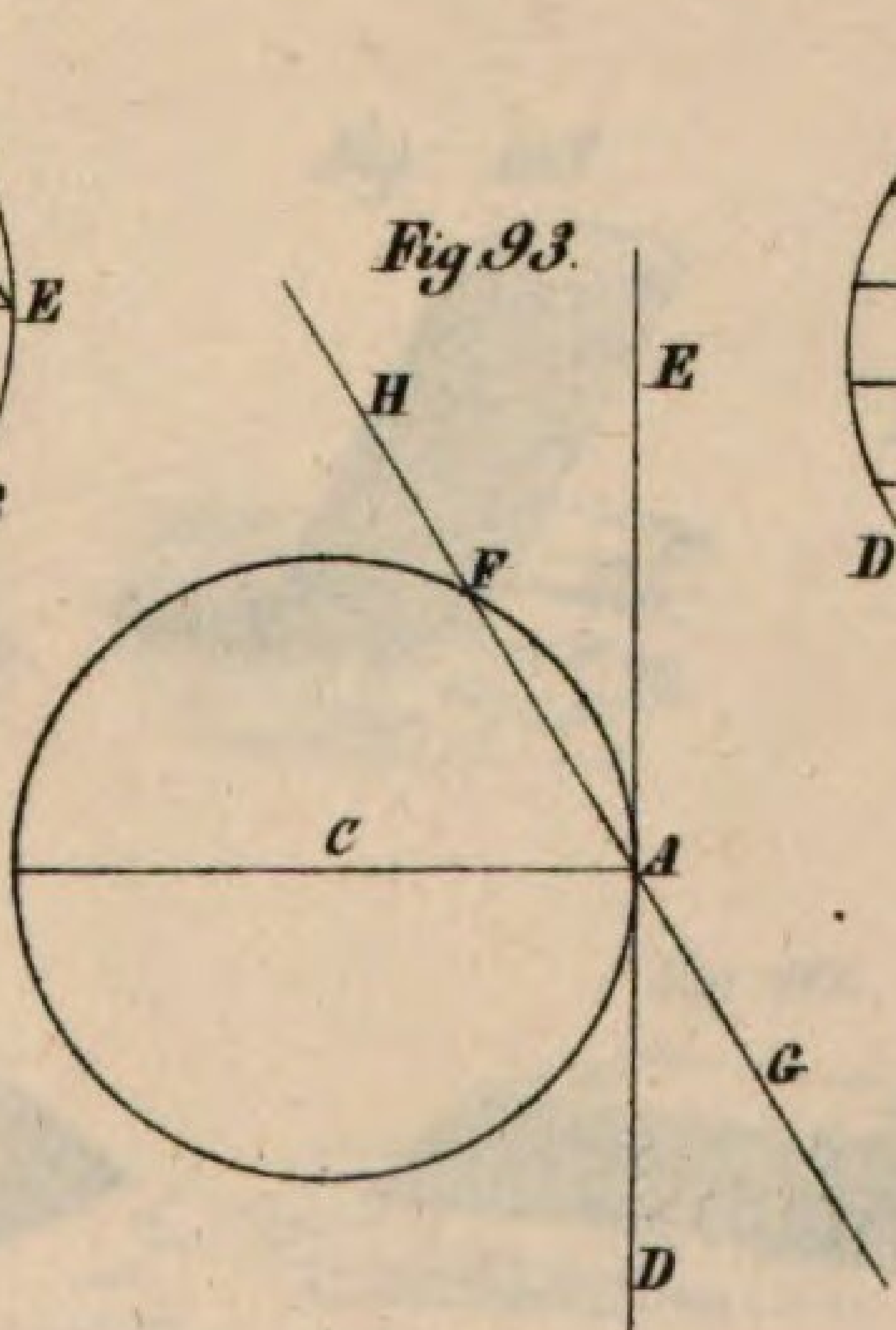


Fig. 94.

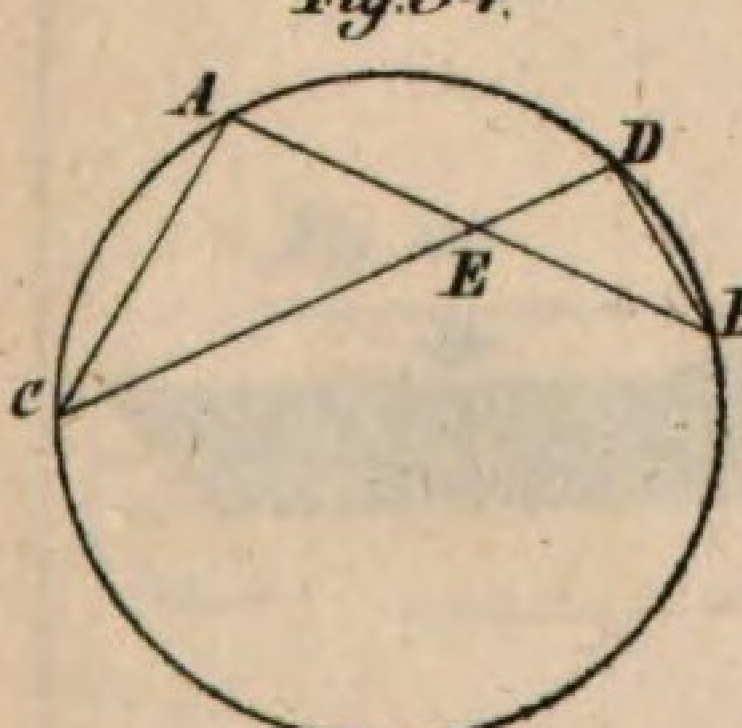


Fig. 95.

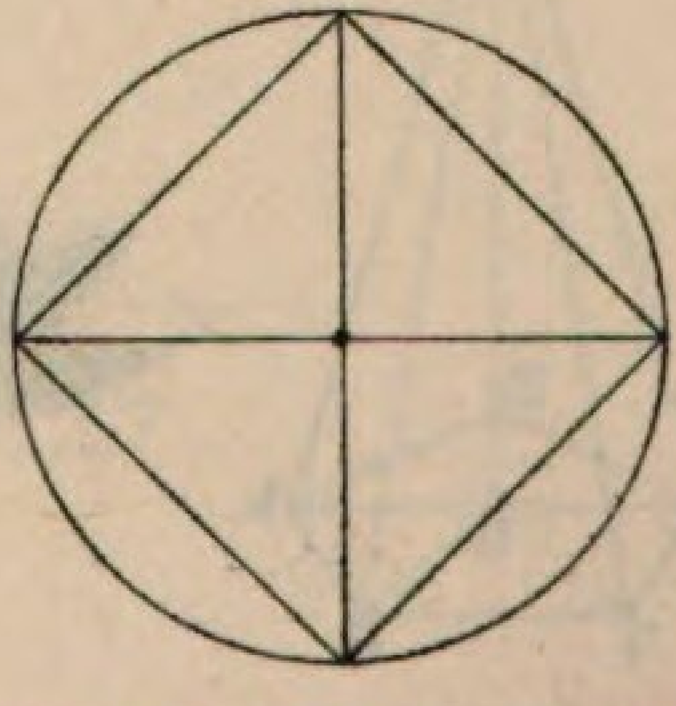


Fig. 96.

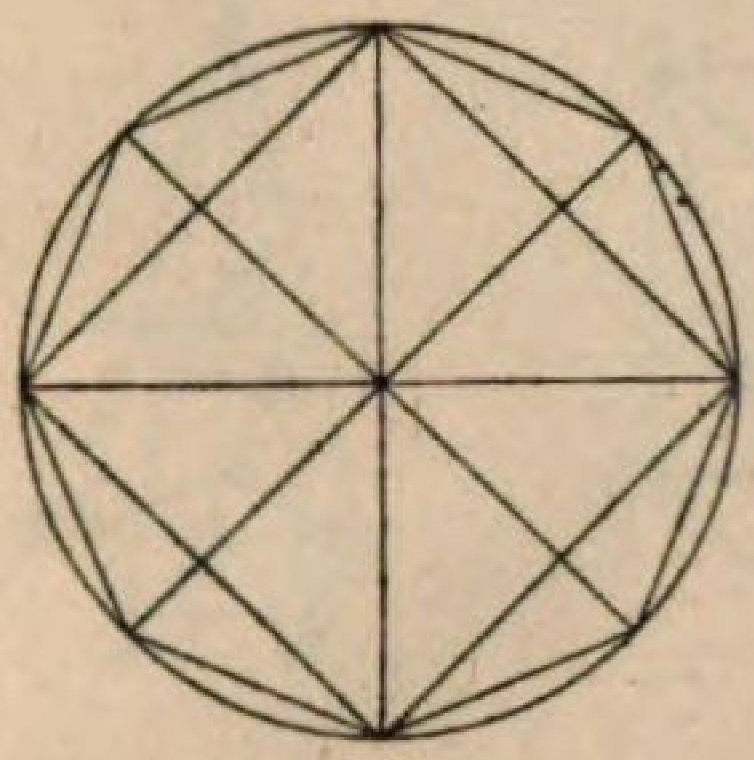


Fig. 97.

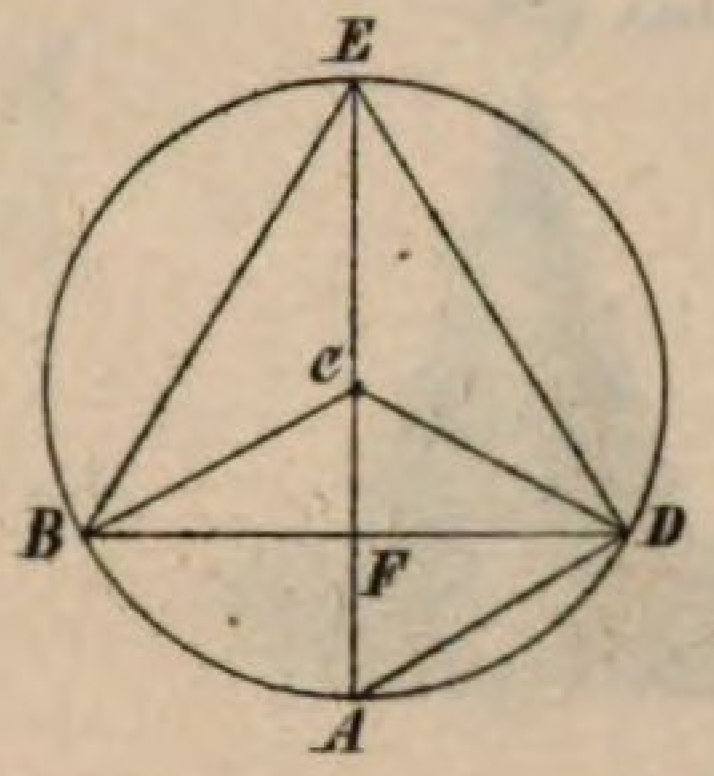


Fig. 98.

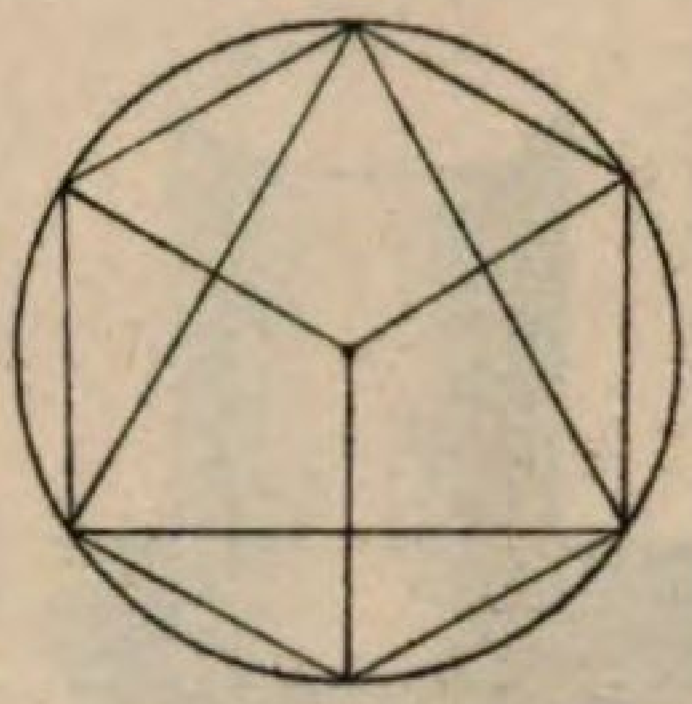


Fig. 101.

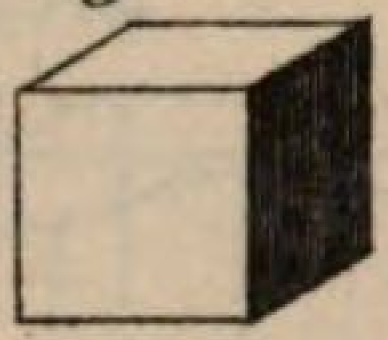


Fig. 99.

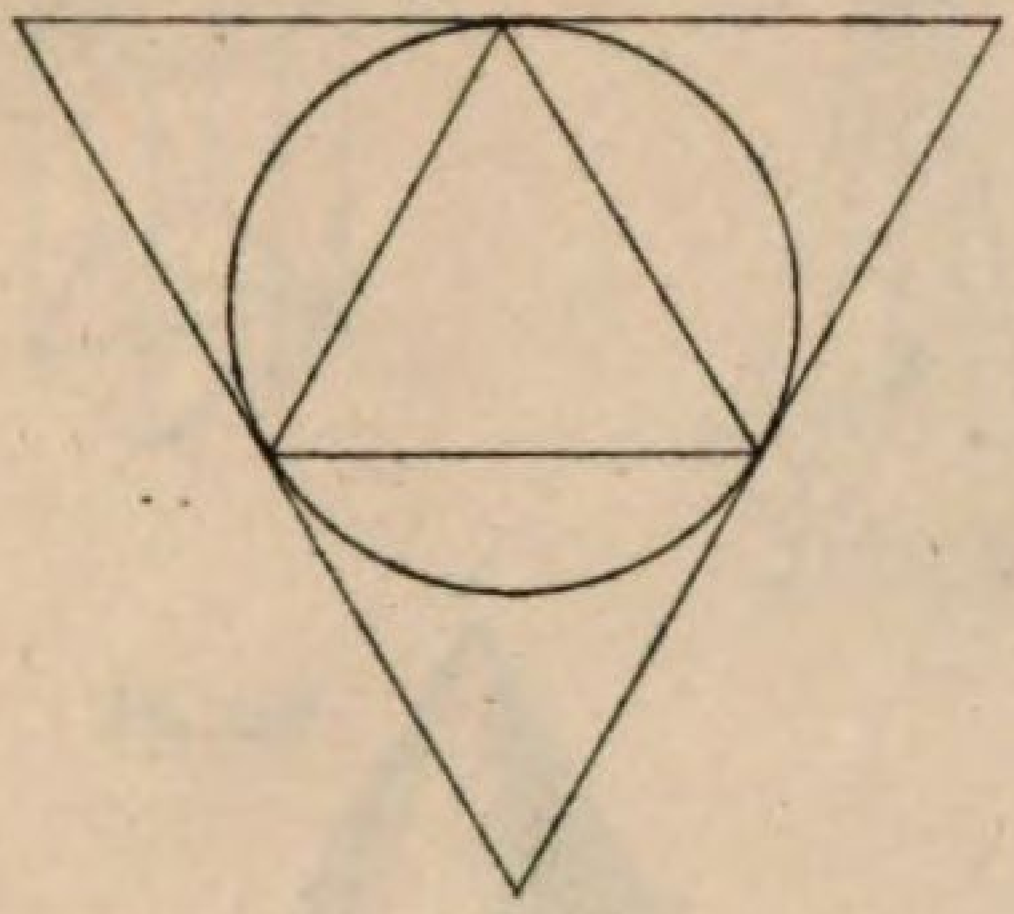


Fig. 100.

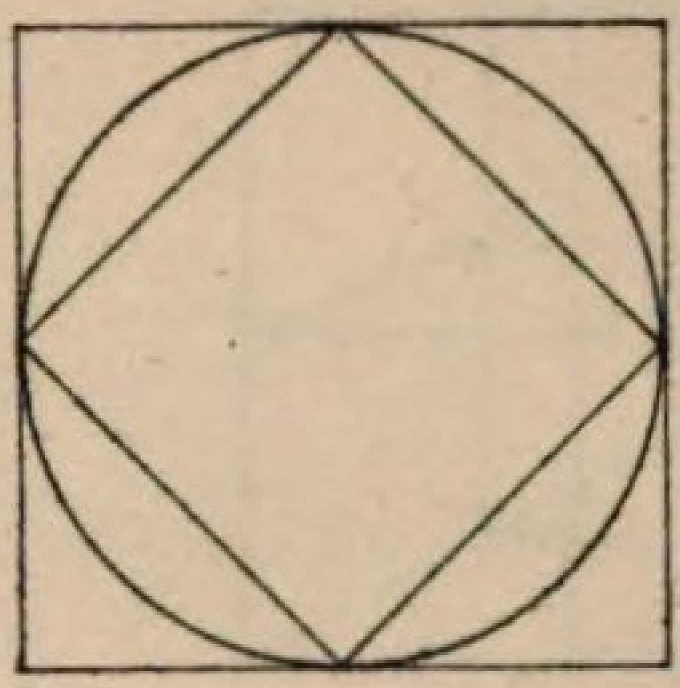


Fig. 102.

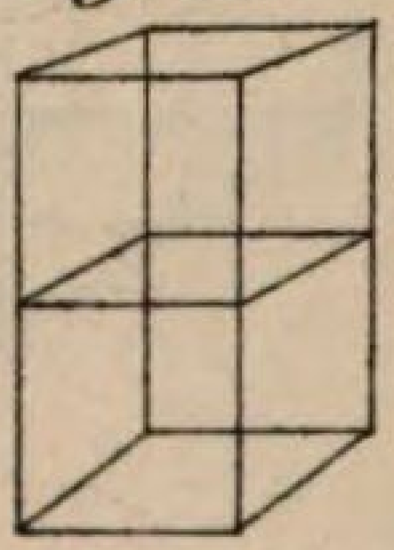


Fig. 103.

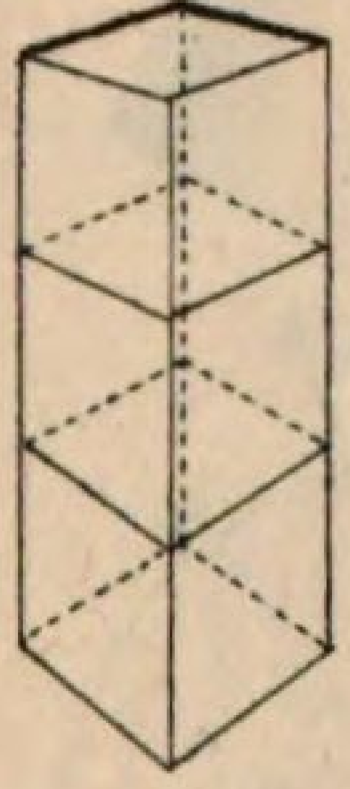


Fig. 104.

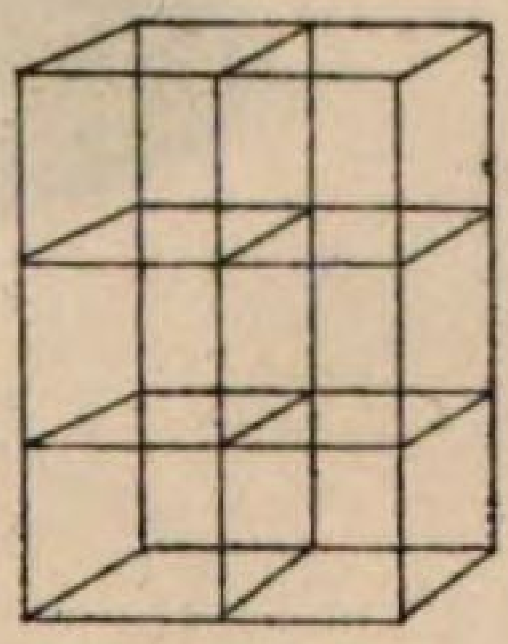


Fig. 105.

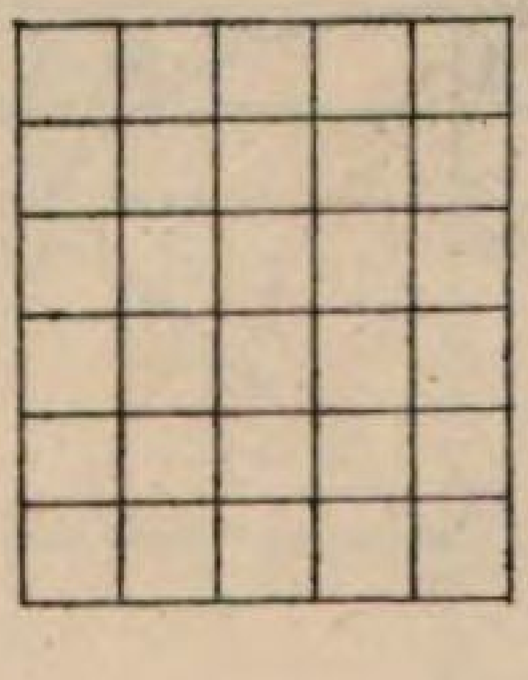


Fig. 106.

Fig. 107.

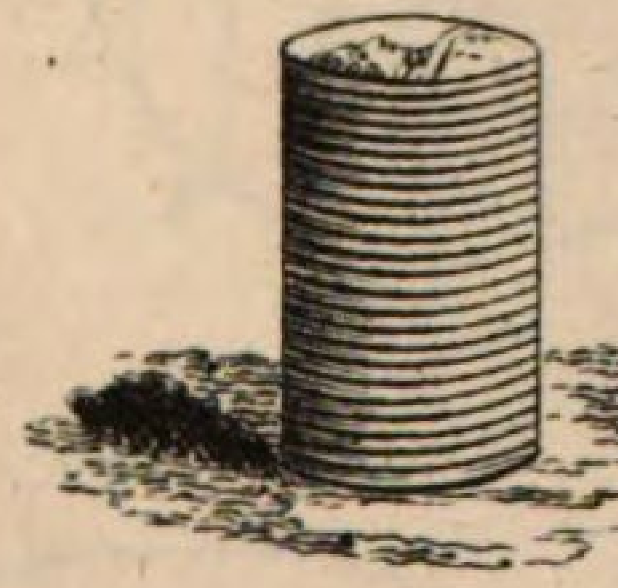


Fig. 108.

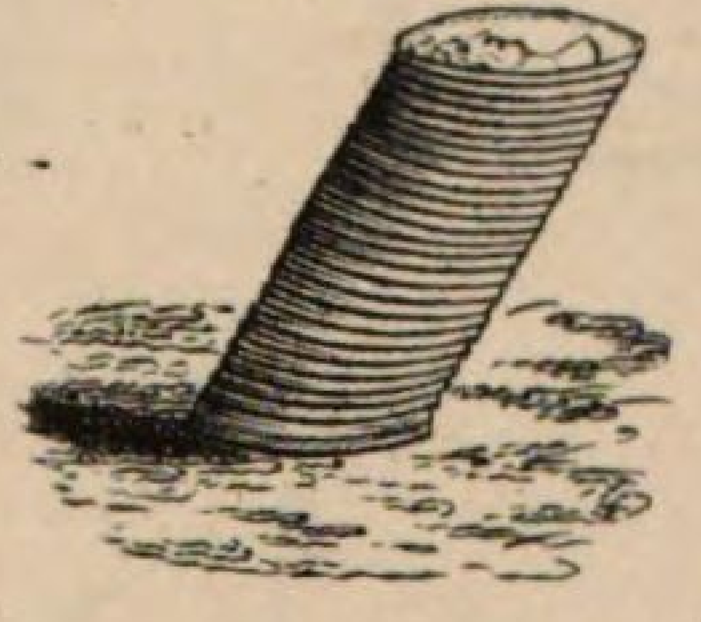


Fig. 109.

Fig. 112.

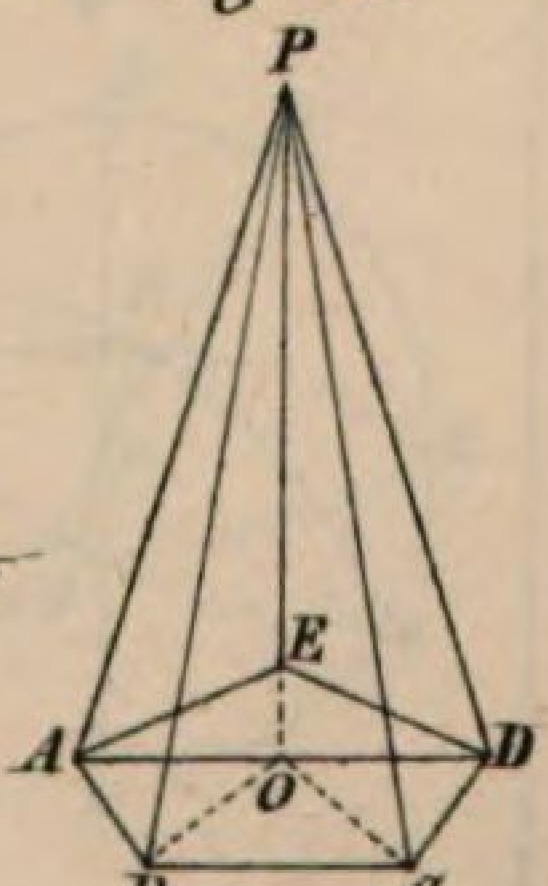
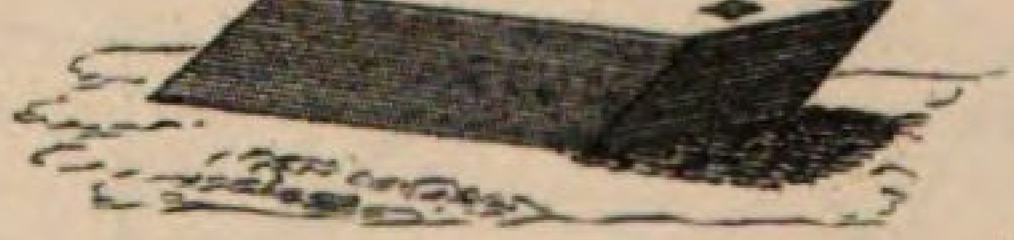


Fig. 110.

Fig. 111.



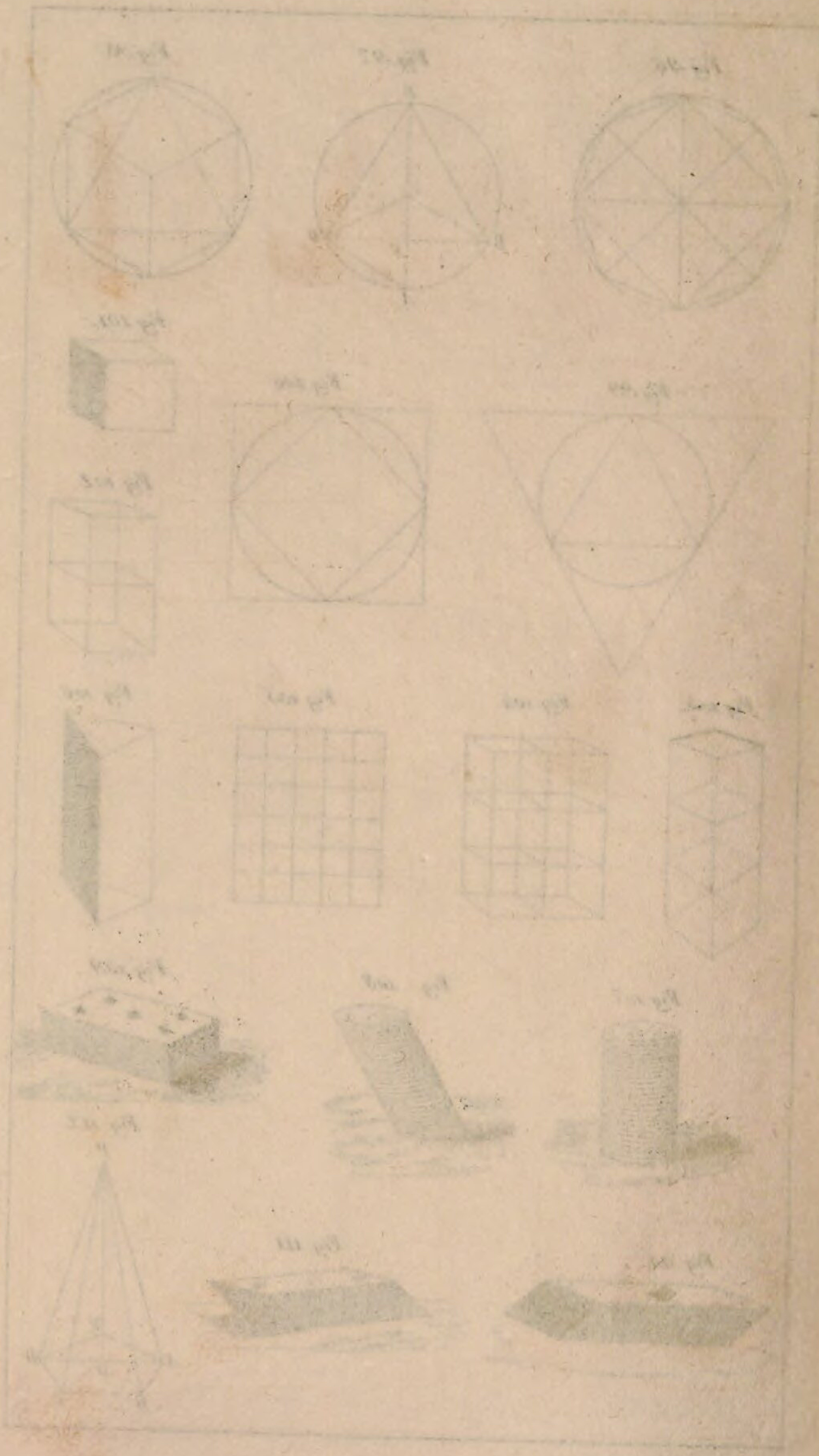


Fig. 113.

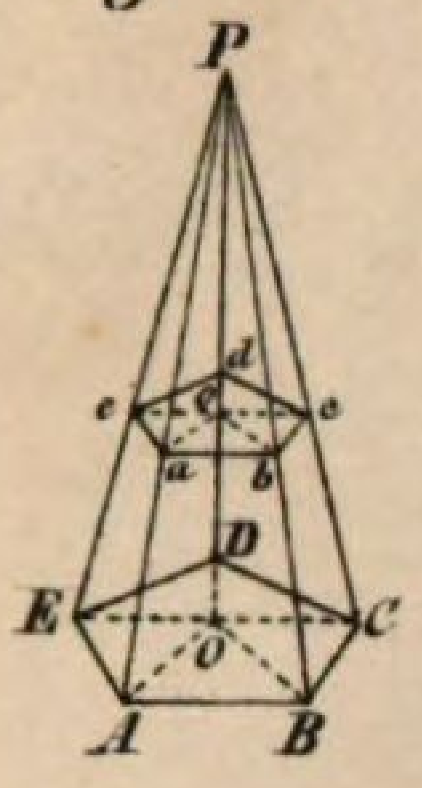


Fig. 114.

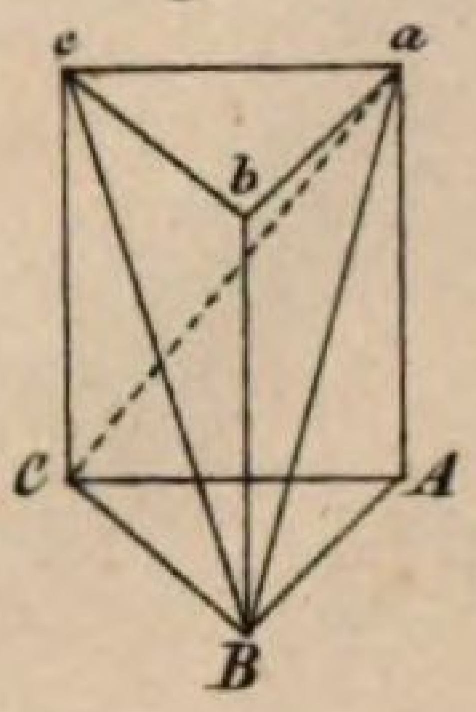


Fig. 115.

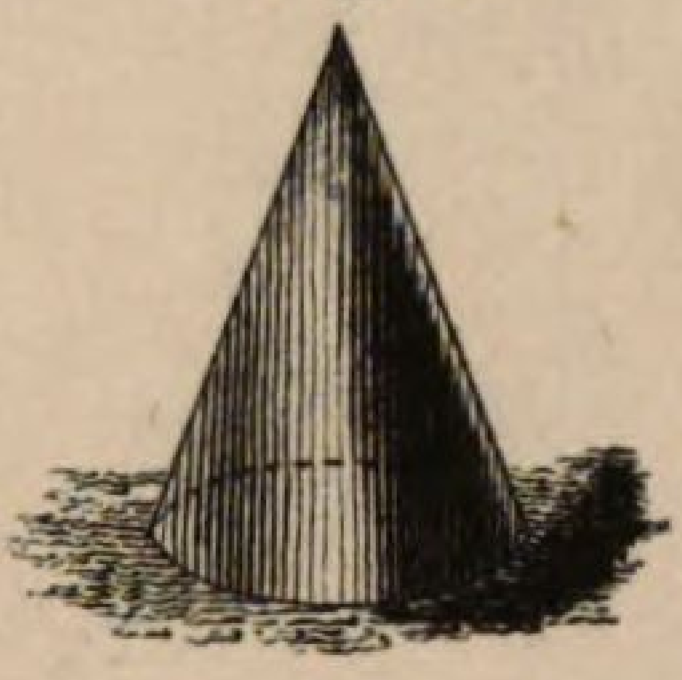


Fig. 116.

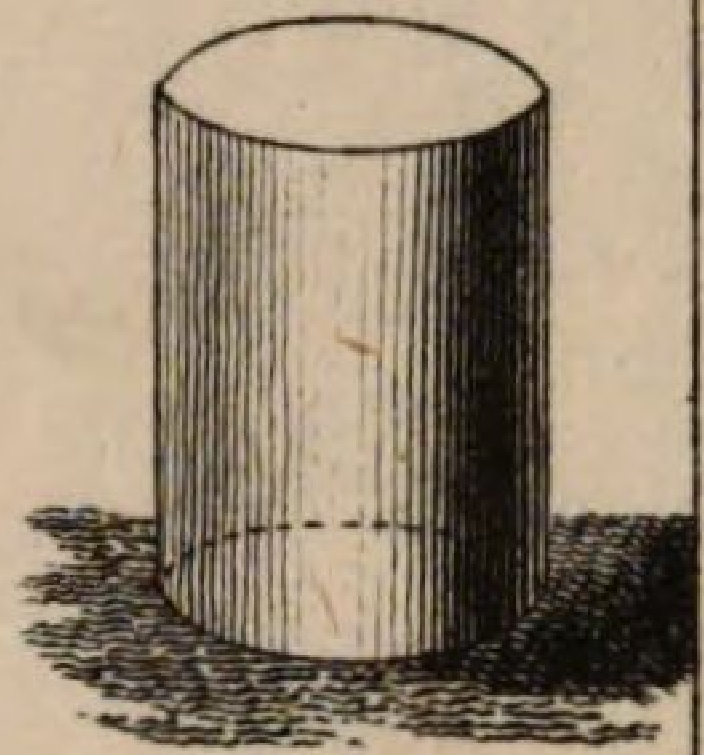


Fig. 117.

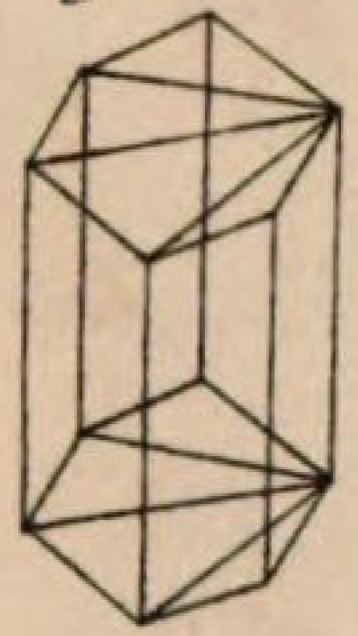


Fig. 118.

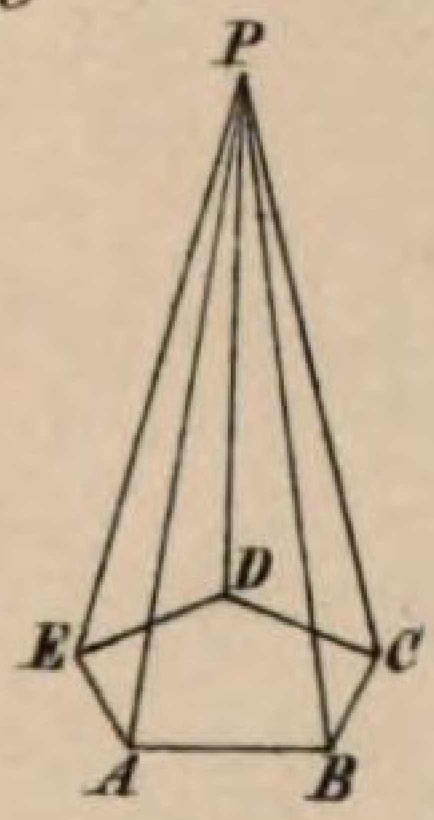


Fig. 120.

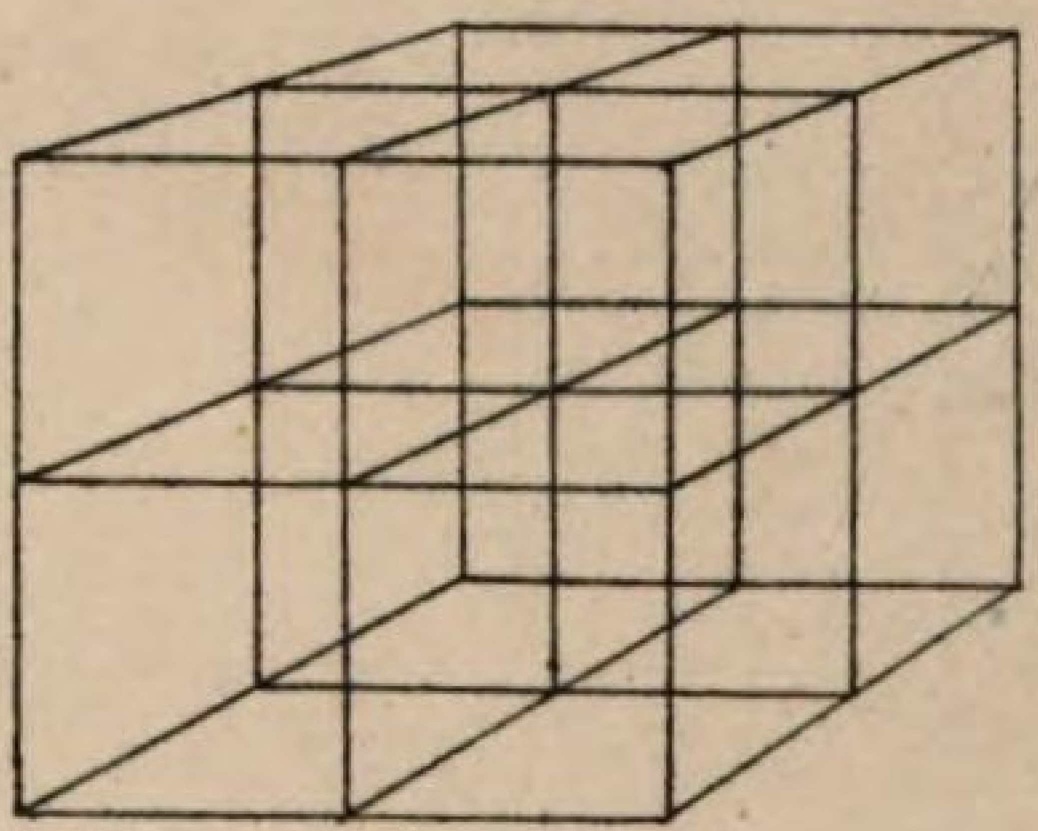


Fig. 119.

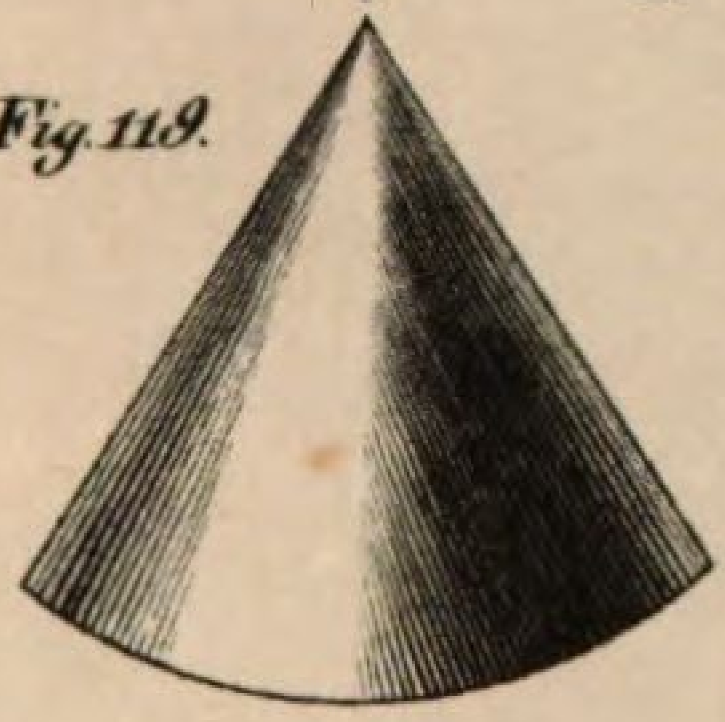


Fig. 121.

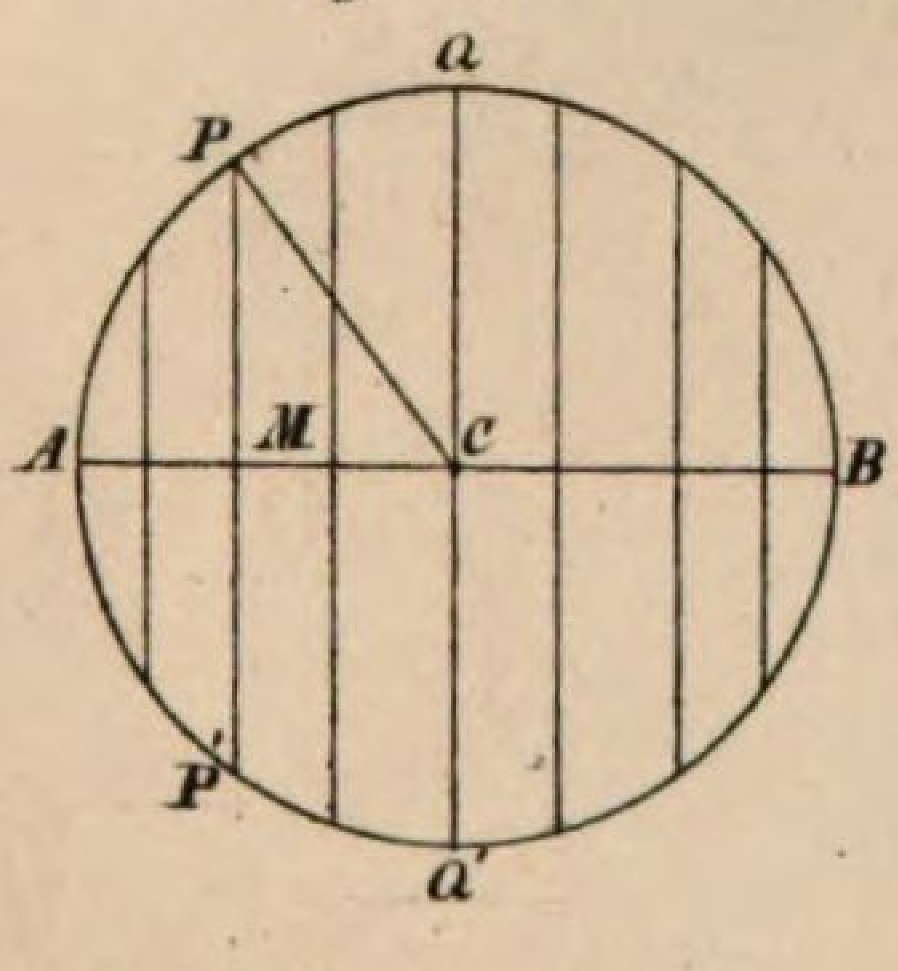


Fig. 123.

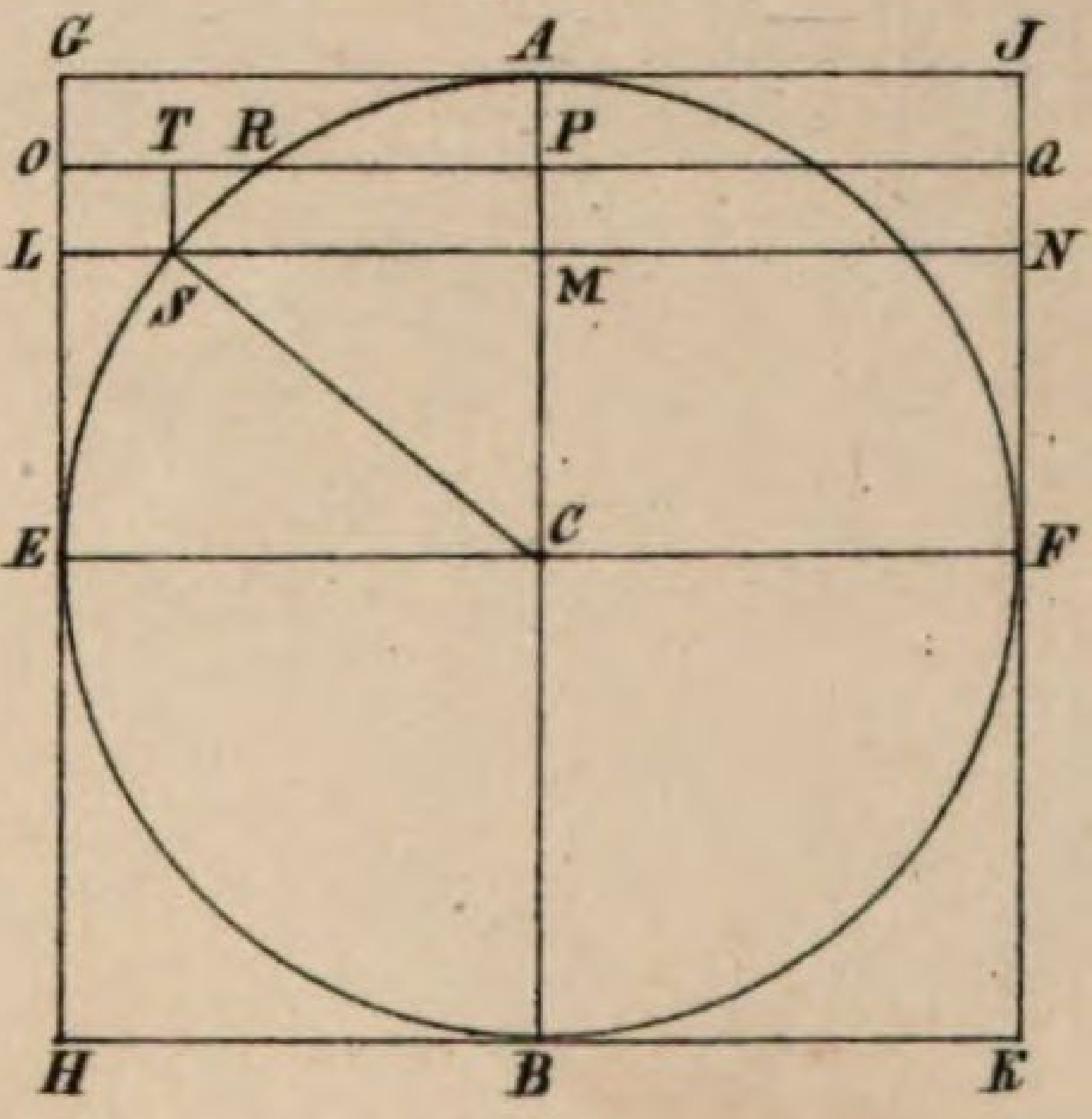


Fig. 122.

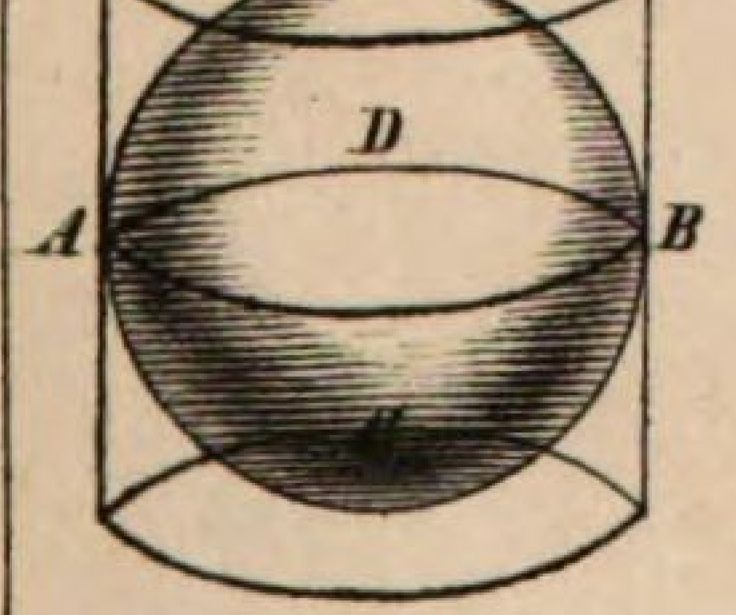


Fig. 124.

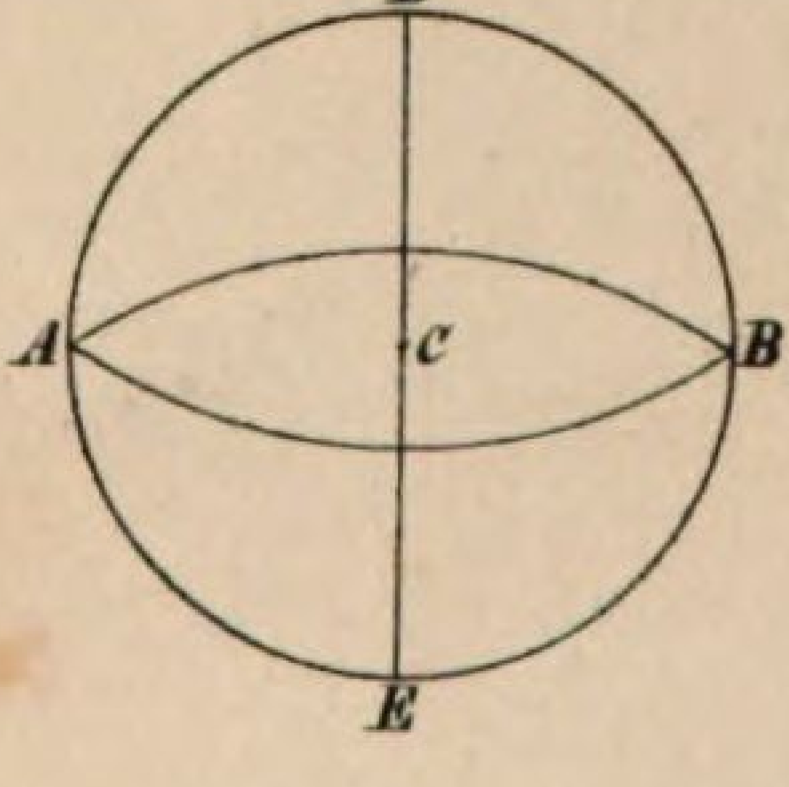
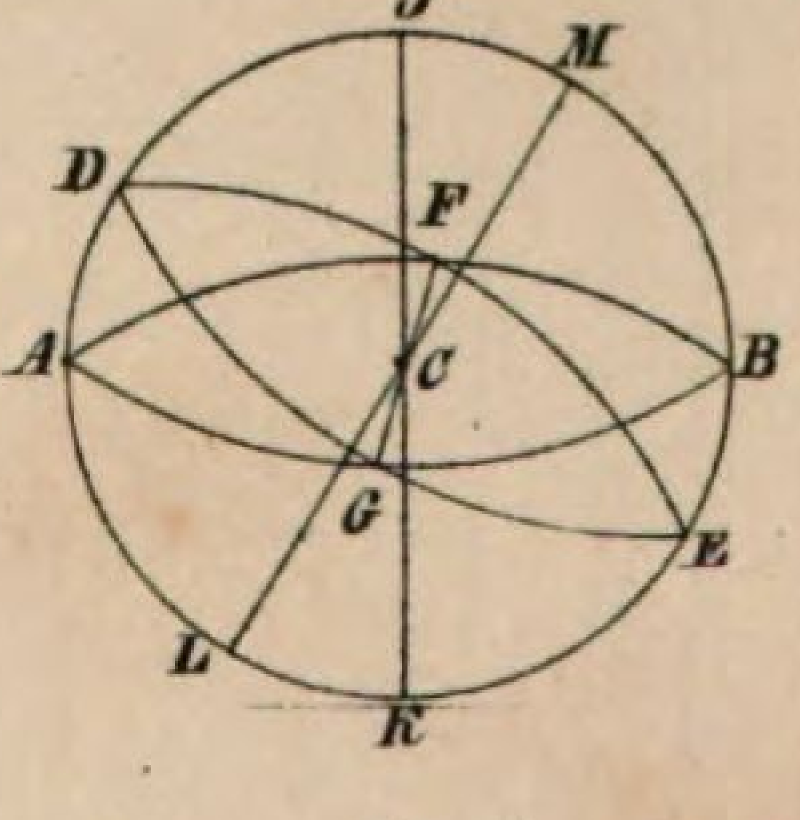


Fig. 125.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Littrow, Carl Ludwig <<von>>,

Populäre Geometrie als Hülfsbuch für Leser gemeinfaßlicher Darstellungen aus dem Gebiete der Astronomie und Physik, und als Einleitung in das Studium der Geometrie überhaupt abgefaßt

Stuttgart 1839

Math.p. 741 t
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083314-5